تطبيقات التكامل المحدود
المساحات
و
الحجوم الدورانية

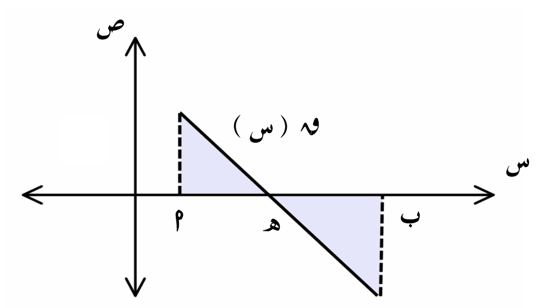
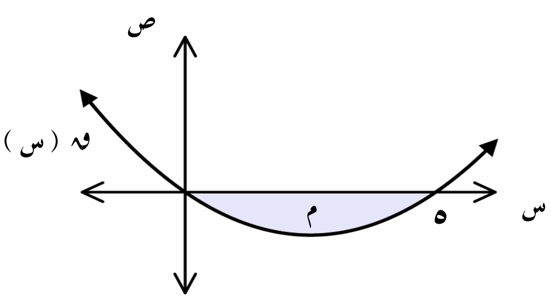
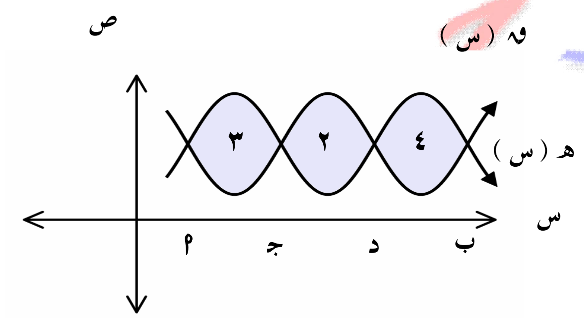
تمارين إثرائية (مميزة)

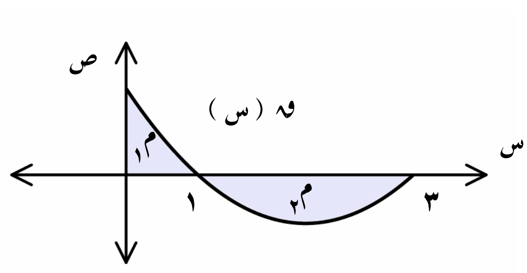
للصف الثاني عشر - علمي

أ . بديع أحمد حمدان

٢٠١٩ م

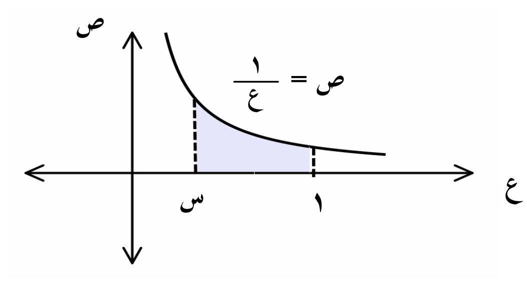
أولاً : إختر الإجابة الصحيحة

<table>
<tr><td colspan="3">١) في الشكل المجاور التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الإقتران ق (س) و محور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هو :</td></tr>
<tr><td>أ) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (س) د س}$</td><td>ب) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} -\text{ق (س) د س}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>جـ) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{ق (س)} \right| \text{د س}$</td><td>د) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} ٢ \left| \text{ق (س)} \right| \text{د س}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">٢) في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الإقتران ق إذا كانت المساحة م المحصورة بين منحنى ق و محور السينات تساوي ٨ وحدات مربعة فإن $\int_{0}^{5} \text{(١ − ق(س)) د س}$ يساوي</td></tr>
<tr><td>أ) −٣</td><td>ب) ٣</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>جـ) −١٣</td><td>د) ١٣</td></tr>
<tr><td colspan="3">٣) إذا كان ق ، هـ إقترانين متصلين في الفترة [أ ، ب] وكانت مساحة المناطق بين الإقترانات كما هو مبين في الشكل المجاور فإن $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{(ق (س) − هـ (س)) د س}$ يساوي :</td></tr>
<tr><td>أ) ٦</td><td>ب) −٢</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>جـ) ٢</td><td>د) − ٥</td></tr>
<tr><td colspan="3">٤) في الشكل المجاور إذا علمت أن مساحة $م_٢$ تساوي ثلاثة أمثال مساحة $م_١$ وأن $\int_{0}^{3} \text{ق(س) د س} = -٦$ فإن $\int_{1}^{3} \text{ق(س) د س}$ يساوي :</td></tr>
</table>



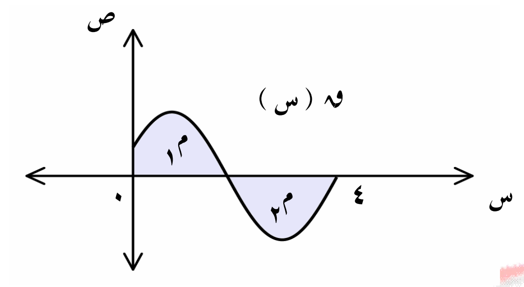
أ) −٢	ب) −٤
ج) −٣	د) −٩

٥) مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور = :



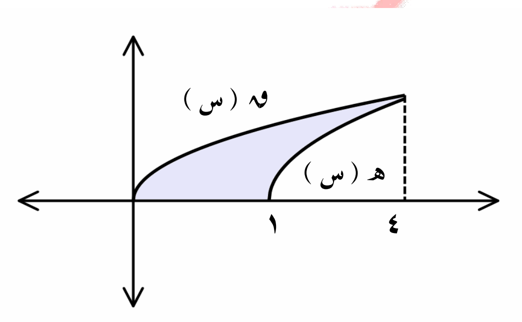
أ) − لو$_{\text{هـ}}$ س	ب) لو$_{\text{هـ}}$ س
ج) هـ$^{\text{س}}$	د) − هـ$^{\text{س}}$

٦) في الشكل المجاور منحنى ق (س) في الفترة [٠ ، ٤] فإذا كانت مساحة م$_1$ = ٨ وحدات مربعة وكانت مساحة م$_2$ = ٦ وحدات مربعة فإن $\int_{0}^{4}$ ق(س) د س يساوي :



أ) ٢	ب) ١٤
ج) ١٠	د) لا شيء مما سبق

٧) في الشكل المجاور مساحة المنطقة المظللة = :



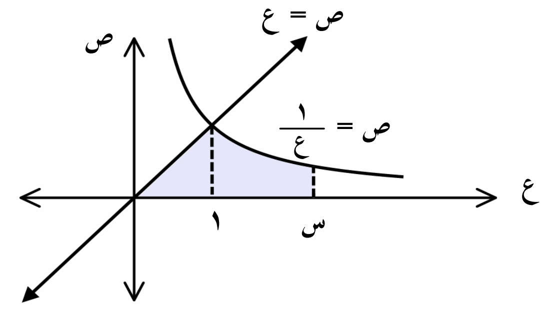
أ) $\int_{0}^{4}$ (ق (س) − هـ (س)) د س

ب) $\int_{1}^{4}$ (ق (س) − هـ (س)) د س

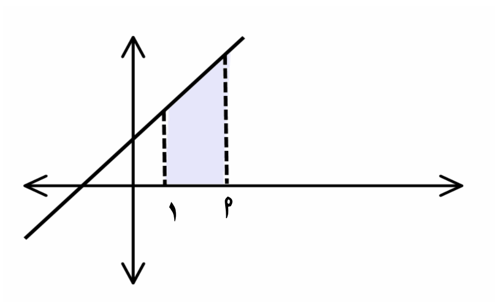
ج) $\int_{0}^{4}$ ق (س) د س − $\int_{1}^{4}$ هـ (س) د س

د) $\int_{0}^{1}$ (ق (س) − هـ (س)) د س

٨ مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور = :

(أ) $\frac{١}{٢}$ − لو$_{هـ}$ س	(ب) $\frac{١}{٢}$ + لو$_{هـ}$ س	
(ج) ١ + لو$_{هـ}$ س	(د) −١ + لو$_{هـ}$ س	

٩ إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة في الشكل المقابل = ١٤ وحدة مربعة ، ق (س) = ٢س + ٣ فإن قيمة الثابت أ = :

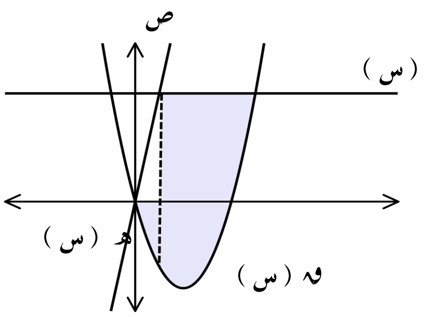
(أ) ٣	(ب) ٢	
(ج) ٥	(د) ٦	

إجابات الإختيار من متعدد (المساحات والحجوم)

الرقم	الإجابة	
١	ج	$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \lvert \text{د}(\text{س}) \rvert \, \text{د س}$
٢	د	١٣
٣	ب	−٢
٤	د	−٩
٥	أ	$-\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$
٦	أ	٢
٧	ج	$\int_{٠}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{١}^{٤} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س}$
٨	ب	$\frac{١}{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$
٩	أ	٣

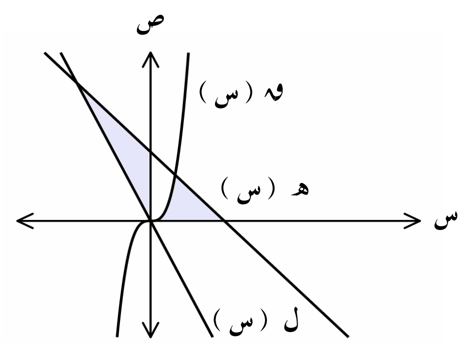
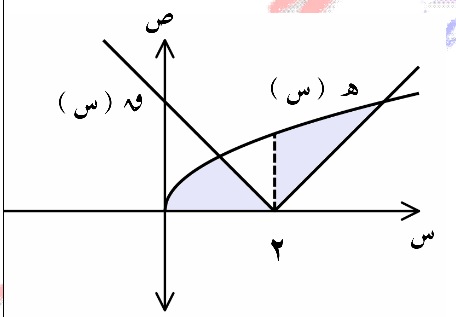
ورقة عمل رقم (١٠)

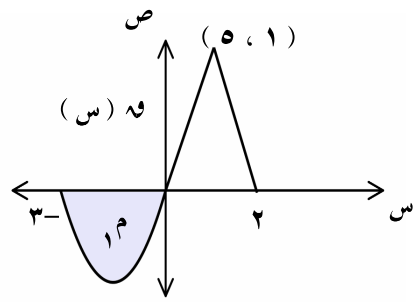
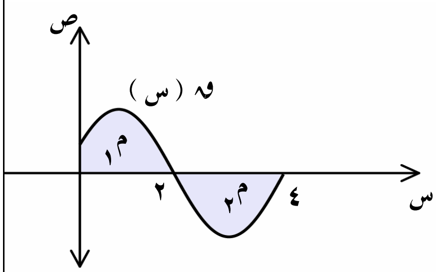
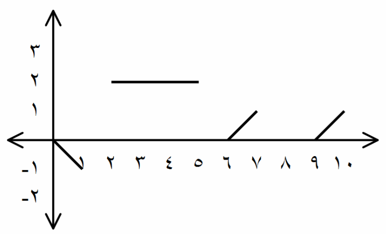
تطبيقات التكامل (المساحات)

١	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = − س^{٣} و هـ (س) = س والمستقيم ص = ٨	٤٤ وحدة مربعة
٢	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = س^{٣} + ١ ومحور السينات في الفترة [−٢ ، ٢]	$\frac{١٩}{٢}$ وحدة مربعة
٣	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠ والمستقيم ص = س − ٢ ومحور السينات	$\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة
٤	جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق (س) = س^{٢} − ٤س ، هـ (س) = س ، ل (س) = ٥ 	$\frac{٨٥}{٣}$ وحدة مربعة
٥	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = ٦ − ٣س − س^{٢} ، هـ (س) = ٣ − س	$\frac{٣٢}{٣}$
٦	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين ص = جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠ ، ١) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)	١ − $\frac{\pi}{٤}$ وحدة مربعة
٧	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص = $\sqrt{٢ - س}$ ، ص = − س ومحور السينات	$\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة
٨	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = جاس − $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة [−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]	$\sqrt{٣}$ + $\frac{\pi}{٦}$ وحدة مربعة
٩	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٣} ، هـ (س) = س	٢ وحدة مربعة
١٠	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ١٠ − س^{٢} و منحنى ك (س) = | س − ٢ | ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول .	$\frac{٣٧}{٢}$ وحدة مربعة

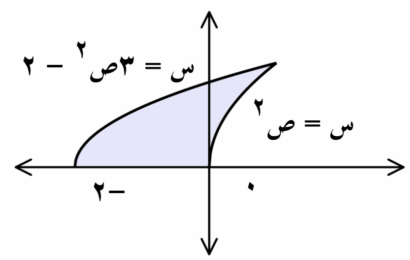
إعداد : أ . بديع أحمد حمدان ماجستير إحصاء تطبيقي ٠٥٩٩٦٨٩٠٧٤

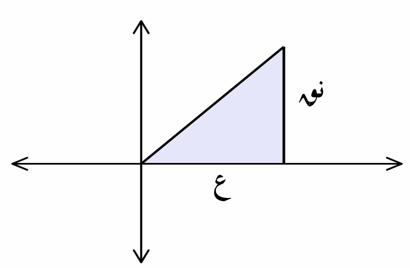
١١	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = س^{٢} و هـ (س) = ٢ − س ومحور السينات والواقعة في الربع الأول .	$\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة
١٢	إحسب المساحة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بمنحنيات الإقترانات ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، ص = ١ ، ص = ٩	٣٤ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة
١٣	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحيات الإقترانات ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، هـ (س) = ٢س − ٤ ومحور السينات	$\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة
١٤	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = س^{٣} − س ومحور السينات	$\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة
١٥	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ص$_{١}$ = س^{٢} والمستقيم ص$_{٢}$ = ٤س	$\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة
١٦	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = هـ^{س} والمستقيم ص = هـ ومحور الصادات	١ وحدة مربعة
١٧	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص − س = ٦ ، ص = س^{٣} و ٢ص + س = ٠	٢٢ وحدة مربعة
١٨	جد قيمة أ بحيث المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى س = $\sqrt{ص}$ والمستقيم س = ٢ ومحور السينات إلى قسمين	أ = $\sqrt[٣]{٤}$
١٩	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = هـ^{س} و منحنى ك (س) = هـ$^{-س}$ والمستقيم ص = ٢	٤لو$_{هـ}$ ٢ − ٢ وحدة مربعة
٢٠	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص$_{١}$ = س^{٣} ، ص$_{٢}$ = س ، ص$_{٣}$ = ٨	٢٠ وحدة مربعة
٢١	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٢ − س^{٢} و منحنى ك (س) = | س |	$\frac{٧}{٣}$ وحدة مربعة
٢٢	أثبت باستخدام التكامل أن مساحة المثلث الذي إرتفاعه أ وطول قاعدته ب هو م = $\frac{١}{٢}$ أ × ب	

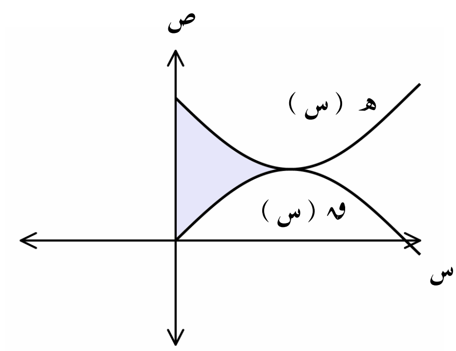
٢٣	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ص = ١ و ومنحنى الإقتران $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ١ & ، ٠ \leqslant س < ١ \\ -س + ٤ & ، ١ \leqslant س \leqslant ٤ \end{cases}$	$\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة
٢٤	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = (س - ٢)^{٢}$ والمستقيم ص = ٤ − س ومحور السينات	$\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة
٢٥	جد مساحة المنطقتين المظللتين في الشكل المجاور حيث : $ق(س) = ٢س^{٣}$ ، هـ (س) = ٣ − س ، ل (س) = −٢ س 	٧ وحدات مربعة
٢٦	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين $ق(س) = س^{٢} - ١$ ، $هـ(س) = ١ - س^{٢}$	$\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة
٢٧	جد مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيات $ق(س) = ٤ - س^{٢}$ ، هـ (س) = س + ٢	$\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة
٢٨	جد مساحة المنطقة المحدودة بالمحورين الإحداثيين ومنحنى كل من الإقترانات $ق(س) = س^{٢} + ١$ و هـ (س) = ٣ − س	$\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة
٢٩	جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق (س) = | س − ٢ | ، هـ (س) $= \sqrt{س}$ 	$\frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$ وحدة مربعة
٣٠	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين $ق(س) = ٨ - ٢س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٤$	٣٢ وحدة مربعة
٣١	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٤س - س^{٢}$ والمستقيم ص = ٤ − س	$\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة
٣٢	إذا كان المستقيم ص = م س يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى $ص = ٢س - س^{٢}$ ومحور السينات إلى قسمين متساويين ، جد قيمة الثابت م حيث س ، م > ٠	$م = ٢ - \sqrt[٣]{٤}$

٣٣	الشكل المجاور يمثل منحنى ه على الفترة [−٣ ، ٢] ، مساحة المنطقة $م_1$ = ٢ وحدة فإذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ ه (س) + ٥) د س = −١٧$ ، جد $\int_{-٣}^{٩} \frac{ه (س)}{٣} د س$		−٢
٣٤	الشكل المجاور يمثل منحنى ه ، مساحة المنطقة $م_1$ = ٣ وحدات ، $م_2$ = ٤ وحدات جد : $\int_{٤}^{٠} (٣ ه (س) − ٧) د س$		٣١
٣٤	في الشكل المجاور إحسب قيمة : $\int_{٠}^{١٠} ه (س) د س$		$\frac{٢١}{٢}$

ورقة عمل رقم (١١) تطبيقات التكامل (الحجوم الدورانية)

١	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بمنحنى ق (س) = $\sqrt{\text{جا٢س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = $\frac{\pi}{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات	π وحدة مكعبة
٢	جد باستخدام التكامل حجم كرة طول نصف قطرها ٦سم	٢٨٨ π سم^{٣}
٣	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحنى ص = هـ^{٢س} والمستقيم ص = هـ^{٢} دورة كاملة حول محور السينات	($\frac{٣}{٤}$ هـ^{٤} + $\frac{١}{٤}$) π وحدة مكعبة
٤	مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة ٦سم ، ٨سم دار المثلث دورة كاملة حول ضلع القائمة الأكبر ما حجم المجسم الناتج عن الدوران ؟	٩٦ π وحدة مكعبة
٥	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنى كل من ق (س) = جتاس ، هـ (س) = جاس دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{\pi}{٢}$ وحدة مكعبة
٦	جد حجم الجسم الناتج عن المنطقة المظللة في الشكل المجاور دورة كاملة حول محور السينات 	π وحدة مكعبة
٧	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنى كل من $\frac{س^{٢}}{٦}$ + ص^{٢} = ١ ، ص^{٢} = $\frac{س}{٦}$ دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{١١}{٩}$ π وحدة مكعبة
٨	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\sqrt{\text{لو}_{هـ} \text{س}}$ والمستقيم س = هـ^{٢} ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	هـ^{٢} + ١ وحدة مكعبة
٩	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\sqrt{\text{لو}_{هـ} \text{س}}$ والمستقيم س = هـ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	π وحدة مكعبة

١٠	إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\sqrt{\text{م س}}$ و منحنى هـ (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{م}}$ ، م ≠ ٠ دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{١٢}{٥}\pi$ وحدة مكعبة جد قية الثابت م	م = ٢
١١	إستخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم المخروط الدائري القائم الذي نصف قطره نق وارتفاعه ع يساوي $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع 	
١٢	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ٯ (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ و هـ (س) = س − ١ دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{١}{٦}\pi$ وحدة مكعبة
١٣	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ومنحنى ص = س والمستقيم ص = هـ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	$\left(\frac{٢\text{هـ}^{٣} - ٨}{٣}\right)\pi$ وحدة مكعبة
١٤	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\sqrt{٢\text{س} - ٤}$ والمستقيم س = ٥ ، ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	٩ π وحدة مكعبة
١٥	إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = م س و منحنى هـ (س) = س^{٢} دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{٦٤}{١٥}\pi$ وحدة حجم جد قيمة م حيث م > ٠	م = ٢
١٦	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = ٢س − س^{٢} و منحنى هـ (س) = س^{٢} دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{\pi}{٣}$ وحدة مكعبة
١٧	جد الحجم الناتج من دوران المثلث الذي رؤوسه م (١ ، ١) ، م (٣ ، ١) ، م (٣ ، ٥) دورة كاملة حول محور السينات .	$\frac{١١٢}{٦}\pi$ وحدة مكعبة
١٨	إذا دارت المنطقة الواقعة في الربعين الأول والثاني و المحصورة بين المنحنيين ص = | س | ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢ دورة كاملة حول محور السينات جد حجم الجسم الناتج .	$\frac{٨}{٣}\pi$ وحدة مكعبة

١٩	إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين ص = | س | و ص = جـ دورة كاملة حول محور السينات يساوي ٣٦ π وحدة حجم جد قيم جـ حيث جـ > ٠		جـ = ٣
٢٠	بين أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالقطع الناقص $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ الواقعة فوق محور السينات دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{٤}{٣} \pi$ أ ب^{٢}		
٢١	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الشكل المجاور دورة كاملة حول محور السينات حيث ىه (س) = جاس ، هـ (س) = ٢ − جاس		(٢ $\pi^{٢}$ − ٤ π) وحدة مكعبة

تمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح
وتحقيق أعلى الدرجات

أ. بديع أحمد حمدان