

الأستاذ عمار البوايزة	وحدة ( التكامل وتطبيقاته )		
رقم الصفحة ( ١ )	الفرع : الأدبي	الرياضيات التكامل غير المحدود	

التكامل بالرموز :

رمز التكامل غير المحدود هو  $\int$

ما هو الاقتران أو الاقترانات التي مشتقتها = ٢س

هنا لاحظ أنه يوجد عدد كبير من الاقترانات منها :

$٢س$  ،  $١ + ٢س$  ،  $١٦ + ٢س$   
 $٥ + ٢س$  ،  $١٠٠ + ٢س$  ،  $٢,٥ - ٢س$   
 $٢س - ٤$  ،  $٢س - ١$  ، ..... إلخ

كل هذه الاقترانات مشتقتها هي (٢س) ولاحظ أنها تختلف عن بعضها في العدد الثابت فقط .. ولكن لا نستطيع كتابتها جميعها ، لذلك نعبر عن العدد الثابت بالرمز (ج) والذي سنسميه (ثابت التكامل) .

وبالتالي : نكتب سؤالا بصيغة التكامل كالآتي ك

$\int ٢س + ج = ؟$

رمز التكامل

المقدار المطلوب تكامله (المشتقة)

متغير التكامل

النتائج

ثابت التكامل

**ملاحظات مهمة :**

- كتابة ثابت التكامل (ج) مع النتائج مهمة جداً في الامتحان ويخصص لها علامة او علامتان.
- كتابة متغير التكامل (س) أيضاً هامة جداً ويخصص لها في العادة علامة واحدة.

**التكامل غير المحدود :**

طلابنا الكرام تذكروا معنا المشتقة ، ولناخذ الأمثلة الآتية :

الاقتران	المشتقة
ق(س) = ٨س	٨
ق(س) = ١ + س	١
ق(س) = ٢س - ٣س	٢س - ٣

لاحظ أننا نأخذ المشتقة بالنسبة للمتغير (س) وهنا ننقل من الاشتقاق ← المشتقة

في هذا الدرس نريد أن نتعلم كيف ننقل (بالعكس) من المشتقة ← كيف ؟؟؟؟ ← الاقتران

لهذا الغرض وجد ما يسمى (التكامل) الذي هو عملية عكسية تماماً للاشتقاق (التفاضل) ، وبالمعنى البسيط يعمل التكامل على إكمال المشتقة حتى تعود الى أصلها وهو الاقتران الأساسي.

ويجب أن يكون التكامل بالنسبة لنفس المتغير الذي تم به الاشتقاق .

المشتقة بالنسبة لـ س إذاً التكامل يكون بالنسبة للمتغير س

انظر الشكل التوضيحي الآتي للعلاقة بين التفاضل والتكامل :



مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة - خاص بـ ستوديو الرياضيات

الأستاذ عمار البوايزة		وحدة ( التكامل وتطبيقاته )			
رقم الصفحة ( ٢ )		الفرع : الأدبي		الرياضيات	

مثال(٢): أوجد  $\int (2s + 5) \cdot ds$  .

**الحل :**

١ - اسأل نفسك سؤال واحد فقط .. ما هو الاقتران الذي عندما نشتقه بالنسبة لـ (س) يعطينا  $(2s + 5)$  .  
تجد أن  $s^2 + 5s$  ،  $s^2 + 5s + \text{عدد}$  يعطي جواباً صحيحاً .  
٢ - لا يجوز أن تضع  $\text{عدد}$  معين من عندك بل تضع (ج).  
٣ - تكتب الجواب كالاتي :

$\int (2s + 5) \cdot ds = s^2 + 5s + ج$

---

مثال(٣): أوجد  $\int (6s^2 + 4s - 1) \cdot ds$  .

**الحل :**

١ - ما هو الاقتران الذي عندما نشتقه بالنسبة لـ (س) يعطينا  $(6s^2 + 4s - 1)$  .  
٢ - تكتب الجواب كالاتي :

$\int (6s^2 + 4s - 1) \cdot ds = 2s^3 + 2s^2 - s + ج$

---

**ملاحظة :** إذا وضع الطالب عدداً ما بدل (ج) في الامتحان ، وكان باقي الجواب صحيحاً يُخصم منه علامة أو علامتان .

مما سبق نستخلص ما يأتي :

(١)  $\int ق(س) \cdot ds = ق(س) + ج$   
(تكامل المشتقة = الاقتران نفسه)  
(أي أن التكامل يلغي المشتقة)

(٢)  $\int \frac{د}{دس} ق(س) \cdot ds = ق(س) + ج$   
(مشتقة التكامل = ما داخل التكامل كما هو)  
(أي أن المشتقة تلغي التكامل)

(٣)  $\int \frac{د}{دس} ق(س) \cdot ds = ق(س) + ج$   
(مشتقة التكامل = ما داخل التكامل كما هو)  
(أي أن المشتقة تلغي التكامل)

**الأفكار الرئيسية المطلوبة :**

**أولاً : كيف تجد التكامل غير المحدود ؟**

(كيف تجد الاقتران اذا كانت مشتقته معلومة؟)

مثال(١): أوجد  $\int 12 \cdot ds$  .

**الحل :**

١ - اسأل نفسك سؤال واحد فقط .. ما هو الاقتران الذي عندما نشتقه بالنسبة لـ (س) يعطينا (١٢) .  
تجد أن  $12s$  ،  $12s + \text{أي عدد}$  يكون صحيح  
٢ - لا يجوز أن تضع  $\text{عدد}$  معين من عندك بل تضع (ج).  
٣ - تكتب الجواب كالاتي :

$\int 12 \cdot ds = 12s + ج$

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة - خاص بـ ستوديو الرياضيات

الأستاذ عمار البوايزة	وحدة ( التكامل وتطبيقاته )			
رقم الصفحة ( ٣ )	الفرع : الأدبي	التكامل غير المحدود (ج1)	الرياضيات	

---

مثال (r) : إذا ق(س) =  $\frac{2}{3}س^3 + 3س^2$  . دس ،  
جد ما يأتي : ١- ق(س) ٢- ق(-١)

الحل : نشتق الطرفين بشكل عادي

١) ق(س) =  $\frac{2}{3}س^3 + 3س^2$  . دس  
ق(س) =  $2س^2 + 6س$

٢) ق(-١) =  $2(-1)^2 + 6(-1) = 2 - 6 = -4$

---

مثال (p) : إذا كان اقتراناً متصلًا بحيث كان  
ق(س) =  $\frac{1}{2}س^2 + 3س$  . دس ، جد ق(س) .

الحل : نشتق الطرفين

ق(س) =  $\frac{1}{2}س^2 + 3س$  . دس  
∴ ق(س) =  $س + 3$

---

مثال (e) : ليكن ق اقتراناً متصلًا بحيث أن :  
ق(س) =  $س^3 + 9س - 5$  . دس ،  
جد قيمة ق(١) .

الحل : نشتق الطرفين

ق(س) =  $س^3 + 9س - 5$  . دس  
∴ ق(س) =  $3س^2 + 9$

∴ ق(١) =  $3(1)^2 + 9 = 12$

ثانياً : كيف تجد المشتقة إذا اعطي التكامل ؟

القاعدة :

المشتقة = المقدار الذي داخل التكامل فقط بدون دس

مثال (١) : أوجد  $\frac{دص}{دس}$  فيما يأتي :

١-  $ص = \frac{1}{3}س^3 + 4س$  . دس .

٢-  $ص = \frac{1}{2}س^2 - 3س$  . دس .

٣-  $ص = \frac{1}{3}س^3 + 3س$  . دس .

٤-  $ص = \frac{1}{2}س^2 + 3س$  . دس .

٥-  $ص = \frac{1}{3}س^3 - \frac{1}{2}س$  . دس .

الحل :

$\frac{دص}{دس} =$  ما داخل التكامل كما هو مهما يكون ، لأن المشتقة تلغي التكامل.

١-  $\frac{دص}{دس} = س^2 + 4$

٢-  $\frac{دص}{دس} = س - 3$

٣-  $\frac{دص}{دس} = س^2 + 3$

٤-  $\frac{دص}{دس} = س + 3$

٥-  $\frac{دص}{دس} = س - \frac{1}{2}$

---

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة - خاص بـ ستوديو الرياضيات

<b>الأستاذ</b> <b>عمار البوايزة</b>	<b>وحدة ( التكامل وتطبيقاته )</b>			
<b>رقم الصفحة</b> <b>( ٤ )</b>	<b>الفرع : الأدبي</b>	<b>التكامل غير المحدود (ج)</b>	<b>الرياضيات</b>	

**مثال (٧) :** ليكن  $[ق(س)]$  دس  $= ٨ - س - ٤س^٢$  ،  
ق(٠) = ١ + جد قيمة : ق(١) ق(١-) ق(٢) ق(١-)

**الحل :**

١) لايجاد ق(١-) لابد من ايجاد ق(س) ، وذلك من خلال كتابة التكامل في الطرف الأيمن بالشكل الاتي :

ق(س) + جد = ٨ - س - ٤س<sup>٢</sup> ؛ جد: ثابت التكامل

**لأن تكامل المشتقة يعطي الاقتران نفسه .**

نجد جد من خلال ق(٠) = ١ بالتعويض

ق(٠) + جد = ٨ - (٠) - ٤(٠)<sup>٢</sup> ← جد = ٧

← ق(س) = ٨ - س - ٤س<sup>٢</sup>

∴ ق(١-) = (١-) - ١ - ٤(١-)<sup>٢</sup>

٧ = ٤ - ١ + ١ =

٢) هنا نريد ق(١-) وبالتالي لابد أن نتخلص من التكامل ، وذلك من خلال اشتقاق الطرفين لأن التكامل يلغي المشتقة.

مشتقة الطرف اليمين = مشتقة الطرف اليسار

ق(س) = ٨ - س

∴ ق(١-) = (١-) - ١ - ٨ = ٧

**مثال (٥) :** ليكن ق اقتراناً متصلاً على ح بحيث أن

$[ق(س)] + ٢س = ٣س$  دس ؛ ما قيمة ق(٢)

**الحل :** نشق الطرفين

$\frac{د}{دس} [ق(س)] = دس = مشتقة (س) + مشتقة التكامل$

∴ ق(س) = ٢س + ٣س

∴ ق(٢) = (٢)٢ + (٢)٣ = ١٢ = ٨ + ٤ =

---

**مثال (٦) :** لتكن ص = ٣(٢ - س) + [ه(س)] دس

، بحيث أن ه(س) اقتراناً متصلاً ، وكانت ه(٠) = ٦ ،

ما قيمة  $\frac{دص}{دس}$  عندما س = ٠ .

**الحل :** نشق الطرفين

$\frac{دص}{دس} = مشتقة الجزء الأول + \frac{دص}{دس} [ه(س)]$  دس

∴  $\frac{دص}{دس} = ٣ \times ٣ (٢ - س) + ه(س)$

$٩ (٢ - س) + ه(س)$

إذا  $\frac{دص}{دس} = ٩ (٢ - ٠) + ه(٠)$

$٠ = س$

$\frac{دص}{دس} = ٩ (٢ - ٠) + ٦$

$٠ = س$

$٤٢ = ٦ + ٤ \times ٩ =$

**مثال (٨) :** إذا كان  $[ق(س)]$  دس  $= \frac{٢ - س}{٢ + س}$  ،  
فما قيمة : ق(٣)

**الحل :**

نفس أسلوب المثال السابق فرع (٢) نشق الطرفين :

ق(س) = مشتقة الطرف الأيسر (مشتقة القسمة)

$\frac{١ \times (٢ - س) - ١ \times (٢ + س)}{(٢ + س)^٢} =$

$\frac{٢ - س - ٢ - س}{(٢ + س)^٢} =$

$\frac{-٢س}{(٢ + س)^٢} =$

ستوديو الرياضيات ... أ. عمار البوايزة

**مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة - خاص بـ ستوديو الرياضيات**

<b>الأستاذ</b> <b>عمار البوايزة</b>	<b>وحدة ( التكامل وتطبيقاته )</b>			<b>ستوديو</b> <b>الرياضيات</b> <b>أ. عمار البوايزة</b>
<b>رقم الصفحة</b> <b>( ٥ )</b>	<b>الفرع : الأدبي</b>	<b>التكامل غير المحدود (ج)</b>	<b>الرياضيات</b>	

---

**مثال (١١) :** إذا كان  $\left[ (ق(س) - (س) \right]$  دس  $٢س^٣ =$  ، وكانت  $ق(٣) = ٣ -$  ، فما قيمة الثابت  $٢٢$  ؟

**الحل :**  
 باشتقاق الطرفين فإن  $ق(س) - (س) = ٢س^٣ \times ٣ = ٢٣ -$   
 $\Leftarrow ق(٣) - (٣) = ٢٣ - ٣ = ٢٠ \Leftarrow ٩ \times ٦ = ٢٣ - ٣ -$   
 $\Leftarrow ٥٧ = ٢٣ - ٣ - ٥٤ =$   
**إذا  $١٩ - = ٢$**

**بالتعويض ق(٣) = (٣ - )**  $\frac{٤}{(٢ + ٣ - )} =$

---

**مثال (٩) :** إذا كان  $\left[ ق(س) (س) \right]$  دس  $٢س^٤ - ٢٤س =$  ، وكانت  $ق(١) = ٨ -$  ، فما قيمة  $٨$  ؟  
**(١) قيمة الثابت  $٢$  ق(٢ - )**

**الحل :**  
**(١) باشتقاق الطرفين فإن : ق(س) = (س)  $٢س^٤ \times ٤ = ٢٤س -$**   
 $٢٤س - ٢٤س =$   
 بما أن  $ق(١) = (١ - )$   $٨ - = ٨ -$   
 $٢٤ - = ١٦ - \Leftarrow ٢٤ - ٢٤ = ١٦ -$   
**إذا  $٤ = ٢$**   
 وبالتالي  $ق(س) = (س) ٢س^٤ - ٢٤س = ١٦ -$   
**ق(٢ - ) = (٢ - )  $٨ - = ١٦ - ٨ - \times ٨ = ١٦ - ٨ - = ٨ -$**

---

**مثال (١٢) :** إذا علمت أن :

$\left[ ق(س) (س) \right]$  دس  $٢س^٣ - ٢س^٢ + ١٠س + ٢ =$  ،  
**م : عدد ثابت ، جد قيمة ق(٤) .**

**الحل :** لا داعي لإيجاد قيمة (م) لأنها تلغى مع الاشتقاق  
 إذا باشتقاق الطرفين فإن :  
 $٢س^٢ = ق(س) - (س) = ٢س^٢ - ٢س + ١٠ + ٢ =$   
 بالقسمة على ٢  $\Leftarrow ق(س) - (س) = ٢س^٢ - ٢س + ١٠ + ٢ =$   
 $\Leftarrow ق(٤) - (٤) = ٢(٤) - ٢(٤) + ١٠ + ٢ =$   
 $٢٩ = ٥ + ٢٤ =$

**مثال (١٠) :** إذا كانت  $\left[ (٧س - ٣س^٥) (س) \right]$  دس  
 أوجد  $\frac{دس}{دس}$  عندما  $١ =$

**الحل :**  
 باشتقاق الطرفين فإن  $\frac{دس}{دس} =$  ما داخل التكامل  
**إذا  $\frac{دس}{دس} = ٧س - ٣س^٥$**   
**إذا  $\frac{دس}{دس} = ٧(١) - ٣(١) = ٤ - ٣ = ١$**

**مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة - خاص بـ ستوديو الرياضيات**



<b>الأستاذ</b> <b>عمار البوايزة</b>		<b>وحدة ( التكامل وتطبيقاته )</b>		
<b>رقم الصفحة</b> <b>( ٦ )</b>	<b>الفرع : الأدبي</b>	<b>التكامل غير المحدود (ج)</b>	<b>الرياضيات</b>	

٦) إذا كان  $\int f(x) dx = 4x - 2$  ، فإن  $f(x)$  تساوي :

( أ )  $\int f(x) dx = 4x - 2$  (ب)  $\int f(x) dx = 4x - 2$  (ج)  $\int f(x) dx = 4x - 2$  (د)  $\int f(x) dx = 4x - 2$

٧) إذا كان  $\int f(x) dx = \frac{2}{x} + 4x$  ، فإن  $f(x)$  اقتران متصل ؛ فإن  $f(1) =$  تساوي :

( أ ) ٨ (ب) ٨ (ج) ٤ (د) ١٦

٨) إذا كان  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  ، فإن  $f(x)$  يساوي :

( أ )  $2x^2 + 4x$  (ب)  $2x^2 + 4x$  (ج)  $2x^2 + 4x$  (د)  $2x^2 + 4x$

٩) إذا كان  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  ، فإن  $f(x)$  تعتبر صحيحة :

( أ )  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  (ب)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  (ج)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  (د)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$

١٠) إذا كانت  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  ، وكان  $f(1) =$  ، فإن  $f(x)$  اقتراناً متصلاً ؛ فإن  $f(1) =$  تساوي :

( أ )  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  (ب)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  (ج)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$  (د)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 4x$

**أسئلة متنوعة على التكامل غير المحدود ؟**

**السؤال الأول :**

يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد ، لكل فقرة منها أربعة بدائل واحد منها فقط صحيح ؛ اختر رمز البديل الصحيح لكل فقرة :

١) إذا كان  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ، فإن  $f(x)$  تساوي :

( أ ) ٩ (ب) ١١ (ج) ١ (د) ٢١

٢) إذا كان  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ، وكان  $f(1) =$  ، فإن  $f(x)$  تساوي :

( أ ) ٩ (ب) ١١ (ج) ١ (د) ٢١

٣) إذا كان  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ،  $K =$  ،  $K =$  عدد حقيقي ، حيث  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ، فإن  $f(x)$  تساوي :

( أ ) ٩ (ب) ١١ (ج) ١ (د) ٢١

٤) إذا كان  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ، فإن  $f(x)$  تساوي :

( أ ) ٩ (ب) ١١ (ج) ١ (د) ٢١

٥) إذا كانت  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ،  $K =$  ،  $K =$  عدد حقيقي ، حيث  $\int f(x) dx = 2x^2 - 4x$  ، فإن  $f(x)$  تساوي :

( أ ) ٩ (ب) ١١ (ج) ١ (د) ٢١

**مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة - خاص بـ ستوديو الرياضيات**