المبدع

في الرياضيات

الثاني عشر

الفرع العلمي والصناعي

الفصل الدراسي الثاني

2

شرح المنهاج

تدريبات شاملة

قوية _ مميزة

أسئلة إمتحانات سابقة

أوراق عمل

إعداد

أ . بديع أحمد حمدان

ماجستير إحصاء تطبيقي

0599689074

تنويه

- هذه المادة هدية لكل طالب علم أومهتم يحق تداولها ورقياً أو إلكترونياً والإستفادة منها .
- لا يحق لأي شخص التعديل عليها .
- لا يحق لأي شخص إقتطاع أو نزع أجزاء منها مع إخفاء أوشطب المصدر .
- أي ملاحظات على المادة أرجو التواصل معي على فيسبوك :

أو الإتصال على جوال : ٠٥٩٩٦٨٩٠٧٤

- أرجو ممن يستفيد منها الدعوة لي ولوالداي (حفظهم الله ورعاهم)

أ . بديع أحمد حمدان

هذا ما عندي فإن أحسنت فمن الله ، وإن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان

الطبعة الثانية - ٢٠٢١

الفهرس

ملاحظة : العناوين المظللة يستثنى منها الفرع الصناعي .

الوحدة الرابعة

التكامل غير المحدود وتطبيقاته

التكامل غير المحدود ٤ – ١

ملخص الدرس

أولاً : معكوس المشتقة (الإقتران الأصلي)

تعريف

إذا كان الإقتران ق(س) متصلاً في الفترة [م ، ب] فإن م (س) يسمى معكوس المشتقة (إقتران أصلي) للإقتران ق(س)
إذا كان : م َ(س) = ق(س) ∀ س ∈] م ، ب [

قاعدة

إذا كان م (س) إقتراناً أصلياً للإقتران ق(س) فإنه يوجد أكثر من إقتران أصلي للإقتران ق(س) وتكون على الصورة :
م (س) + ج حيث ج عدد ثابت .

ملاحظات مهمة

- لإثبات أن أي إقتران وليكن م (س) إقتراناً أصلياً للإقتران ق(س) نقوم باشتقاق الإقتران م (س) فإذا كان :
م َ(س) = ق(س) فإن م (س) إقتراناً أصلياً للإقتران ق(س) .
- ناتج طرح أي إقترانين أصليين يساوي مقدار ثابت وبناءً عليه مشتقة ناتج طرح أي إقترانين أصليين تساوي صفر .
- (في مسائل الإختيار من متعدد) إذا كان م (س) ، هـ (س) إقترانين أصليين للإقتران ق (س) فإن :
(م هـ – ب م) َ(س) = (م – ب) ق (س)

ثانياً : تعريف التكامل غير المحدود

تعريف

١) تسمى مجموعة كل الإقترانات الأصلية للإقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للإقتران ق(س) ويرمز للتكامل غير المحدود بالرمز $\int$ ق(س) د س ويقرأ تكامل ق(س) دال س .

٢) إذا كان م َ(س) = ق(س) فإن $\int$ ق(س) د س = م (س) + ج حيث ج عدد ثابت يسمى ثابت التكامل .

٣) إذا كان ق(س) إقتراناً متصلاً فإن : $\frac{د}{د س}$ ($\int$ ق(س) د س) = ق(س) (الإشتقاق يلغي التكامل غير المحدود)

مثال

إذا كان ق(س) = ∫ (س³ − ٣ أ س² + ١) د س وكان ق″(٢) = ٩ جد قيمة الثابت أ

الحـــل

باشتقاق الطرفين :

ق′(س) = (د / د س) (∫ (س³ − ٣ أ س² + ١) د س) = س³ − ٣ أ س² + ١

ق″(س) = ٣س² − ٦ أ س

∵ ق″(٢) = ٩ ⇐ ١٢ − ١٢ أ = ٩ ⇐ ١٢ أ = ٣ ⇐ أ = ١/٤

مثال

إذا كان أ(س) ، هـ(س) إقترانين أصليين للإقتران ق(س) = ٣س − ١ فإن (٩هـ − ٣أ)′(١) يساوي :

أ) ٦ ب) صفر ج) ٩ د) ١٢

الحـــل

(٩هـ − ٣أ)′(س) = ٦ ق(س) ⇐ (٩هـ − ٣أ)′(١) = ٦ ق(١) ⇐ = ٦ (٣ − ١) = ١٢

(الإجابة الفرع د)

لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

ورقة عمل (١) — التكامل غير المحدود

إختر الإجابة الصحيحة

١) الإقتران الأصلي للإقتران ق (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ + جتاس هو			
أ) ٢ $\sqrt{س}$ – جاس	ب) $\sqrt{٢س}$ + جاس	ج) $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ – جتاس	د) $\sqrt{س}$ + جاس + ١
٢) إذا كان م (س) ، هـ (س) إقترانين أصليين للإقتران ق (س) فإن (٤هـ – ٣م)َ (س) يساوي :			
أ) ق (س)	ب) ٢ قَ (س)	ج) ٢ ق (س)	د) قَ (س)
٣) إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int$ ق (س) د س = جتا^{٢}س – ٢س + جـ فإن قَ ($\frac{\pi}{٢}$) = :			
أ) ٢	ب) صفر	ج) ٢-	د) ٣ – π
٤) بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) المتصل ح بحيث $\int$ م (س) د س = س^٣ – س^٢ + جـ فإن ق (٢) = :			
أ) ٤	ب) ٨	ج) ١٠	د) ١٢
٥) إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً على ح وكان $\int$ ق (س) د س = س^٢ – جتاس + ٢ فإن قَ (٠) = :			
أ) ٣	ب) ٢	ج) ١	د) صفر
٦) إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int$ جا ($\frac{٣\pi}{٢}$) ق (س) د س = ١ + س^٢ فإن ق (س) = :			
أ) ٢س	ب) ١ + س^٢	ج) –٢س	د) –١ – س^٢
٧) جنين : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان ع (س) ، هـ (س) إقترانين أصليين للإقتران المتصل بحيث إن ق (١) = ٦ ، قَ (١) = ٤ وكان (أهـ – ع)َ (١) = ٢٤ فإن قيمة الثابت أ :			
أ) ٢	ب) ٣	ج) ٥	د) ٧
٨) أردن : ٢٠٠٩ شتوي — إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int$ (ظا^{٢}س – قا^{٢}س) ق (س) د س = ٣ – س^٢ فإن ق (س) = :			
أ) –٢س	ب) ٣ – س^٢	ج) ٢س	د) س^٢ –٣


٩) إذا كان ل ، ق ، هـ ثلاث إقترانات متصلة بحيث لَ(س) = ق (س) ، قَ(س) = هـ (س) فأي العبارات الآتية صحيحة :

أ) ∫ لً(س) د س = هـ (س) + جـ	ب) ∫ هـ (س) د س = لَ(س) + جـ
جـ) ∫ ل (س) د س = ق (س) + جـ	د) ل (س) – هـ (س) = جـ

١٠) إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً ، م (س) إقتراناً أصلياً للإقتران ق (س) وكان أ ، جـ ثابتين ، أ ≠ ٠ فإن :

∫ ق (أ س) د س = :

أ) م (أ س) + جـ	ب) $\frac{١}{أ}$ م (أ س) + جـ	جـ) م (س) + جـ	د) $\frac{١}{أ}$ م (س) + جـ

١١) فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان ∫ ق (س) د س = أس^{٣} – ٣س ، ق (س) متصل وكان ق (٢) – ق (١) = ١٨ فما قيمة ق (١) ؟

أ) ٣	ب) ٦	جـ) ٩	د) ٢١

١٢) إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) بحيث م (س) = ظتاس + ١ فإن ق ($\frac{\pi}{٤}$) = :

أ) −٤	ب) −٢	جـ) ٢	د) ٤

١٣) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان ∫ ($\frac{١}{س}$ ل (س)) د س = س + جـ ، س ≠ ٠ فما قاعدة الإقتران ل (س) ؟

أ) س	ب) س^{٢}	جـ) ١	د) صفر

١٤) فلسطين : ٢٠٢٠

ليكن م (س) إقتراناً أصلياً للإقتران ق (س) المتصل على ح فإذا كان

∫ س^{٢} ق (س) د س = ٣ م (س) + ٢س^{٢} + جـ فما قيمة ق (١) ؟

أ) −٢	ب) ٥	جـ) ٧	د) $\frac{٧}{٢}$

١٥) إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) المتصل ح بحيث ∫ م (س) د س = س^{٣} – س^{٢} – س + جـ وكان

ك (س) = ق (س) م (س) ، جد (ك – ٦ ق)َ (٢) ؟

أ) ١٧٨	ب) ١٠٦	جـ) −١٠٠	د) ٩

إجابات الإختيار من متعدد (التكامل غير المحدود)

١	د	$\sqrt{س}$ + جاس + ١	٢	أ	ق(س)	٣	أ	٢
٤	ج	١٠	٥	أ	٣	٦	ج	−٢س
٧	ج	٥	٨	ج	٢س	٩	ب	$\int$ هـ(س) د س = ل‾(س) + ج
١٠	ب	$\frac{١}{أ}$ م(أ س) + ج	١١	أ	٣	١٢	ب	−٢
١٣	أ	س	١٤	أ	−٢	١٥	ب	١٠٦

ورقة عمل (٢) التكامل غير المحدود

١	إذا كان م (س) أصلياً لإقتران ق (س) حيث ق (س) > ٠ ، م (س) = س^{٢} ق (س) جد الصيغة العامة للإقتران ق (س) .	ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢}\ \text{ق}'(\text{س})}{١ - ٢\text{س}}$
٢	إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً على ح وكان $\int$ (ق (س) + ٢) د س = س^{٣} + أ س^{٢} + ٩ ، ق (١) = ٧ جد قيمة أ	أ = ٣
٣	إذا كان ق (س) = $\int$ (هـ$^{\text{جاس}}$ + لو$_{\text{هـ}}$ (أ س + ١)^{٣}) د س جد قيمة الثابت أ التي تجعل ق″ (٠) = ٧	أ = ٢
٤	جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ $\int$ (جتا٢س – ٢جتا^{٢}س) د س	–١
٥	إذا كان الإقتران م (س) معكوس المشتقة للإقتران الخطي ق (س) بحيث م′ (١) = ٥ ، م″ (١) = ٦ جد ق (٢)	١١
٦	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا علمت أن $\int$ (ق′ (س) + ظتاس) د س = لو$_{\text{هـ}}$ (ظاس قاس) حيث : س ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [أثبت أن ق′ (س) = ٢ظاس	

٤ – ٢ قواعد وخواص التكامل غير المحدود

ملخص الـــدرس

عملية إيجاد التكامل غير المحدود باستخدام الإقتران الأصلي عملية شاقة ومرهقة لذلك سنذكر بعض قواعد وخواص التكامل غير المحدود والتي تساهم في تبسيط وتسهيل عملية إيجاد التكامل غير المحدود .

أولاً : قواعد التكامل غير المحدود

١) $\int \text{أ} \, \text{د س} = \text{أ س} + \text{ج}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}$

٢) $\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{د س} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ج}$ ، $\text{ن} \neq -1$

٣) $\int \dfrac{1}{\text{س}} \, \text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ج}$

٤) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{د س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

٥) $\int \text{جاس} \, \text{د س} = -\text{جتاس} + \text{ج}$

٦) $\int \text{جتاس} \, \text{د س} = \text{جاس} + \text{ج}$

٧) $\int \text{قا}^{2}\text{س} \, \text{د س} = \text{ظاس} + \text{ج}$

٨) $\int \text{قتا}^{2}\text{س} \, \text{د س} = -\text{ظتاس} + \text{ج}$

٩) $\int \text{قاس ظاس} \, \text{د س} = \text{قاس} + \text{ج}$

١٠) $\int \text{قتاس ظتاس} \, \text{د س} = -\text{قتاس} + \text{ج}$

ثانياً : خواص التكامل غير المحدود

خواص التكامل غير المحدود

إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل فإن :

١) $\int \text{أ ق(س)} \, \text{د س} = \text{أ} \int \text{ق(س)} \, \text{د س}$ ، (تكامل حاصل ضرب ثابت في إقتران)

٢) $\int (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}) \, \text{د س} = \int \text{ق(س)} \, \text{د س} \pm \int \text{هـ(س)} \, \text{د س}$ (تكامل جمع أو طرح إقترانين)

ورقة عمل (١) قواعد وخواص التكامل غير المحدود

إختر الإجابة الصحيحة

١) $\int \frac{\text{ظتاس}}{\text{جاس}}$ د س = :			
(أ) قاس + جـ	(ب) قتاس + جـ	(جـ) – قاس + جـ	(د) – قتاس + جـ
٢) أردن : ٢٠٠٨ شتوي — $\int \frac{٢}{١ + \text{جتا}٢\text{س}}$ د س = :			
(أ) قاس + جـ	(ب) ظاس + جـ	(جـ) – قتاس + جـ	(د) ظتاس + جـ
٣) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س} + ٣}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ د س = :			
(أ) هـ^{٣} س + جـ	(ب) هـ$^{٣\text{س}}$ + جـ	(جـ) هـ$^{٤\text{س}}$ + جـ	(د) ٣س + جـ
٤) فلسطين : ٢٠١٧ — $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{(\text{جاس جتاس})^{٢}}$ د س = :			
(أ) – ظتاس – ظاس + جـ	(ب) ظتاس + ظاس + جـ	(جـ) قاس + قتاس + جـ	(د) – قاس – قتاس + جـ
٥) فلسطين : ٢٠١٢ — $\int$ جاس جتاس د س = :			
(أ) $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} ٢س + جـ	(ب) $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢} ٢س + جـ	(جـ) – $\frac{١}{٤}$ جا ٢س + جـ	(د) – $\frac{١}{٤}$ جتا ٢س + جـ

٦) $\int \left(\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}} - \frac{٩}{\text{س}^{٢}} \right)$ د س = :	
(أ) $\frac{٥}{٨} \sqrt[٨]{\text{س}^{٥}} + \frac{٩}{\text{س}}$ + جـ	(ب) $\frac{٥}{٨} \sqrt[٥]{\text{س}^{٨}} + \frac{٩}{\text{س}}$ + جـ
(جـ) $\frac{٨}{٥} \sqrt[٥]{\text{س}^{٨}} + \frac{٩}{\text{س}}$ + جـ	(د) $\frac{٨}{٥} \sqrt[٥]{\text{س}^{٨}} + \frac{٩}{\text{س}^{٢}}$ + جـ

٧) ليكن ق(٢) = ٣ ، قَ(س) = ٢س فإن ق(٣) = :			
(أ) ١٠	(ب) ٩	(جـ) ٨	(د) ٦
٨) إذا كان قً(س) = هـ$^{\text{س}}$ + ٤ وكان قَ(٠) = ١ ، ق (٠) = ٤ فإن ق (١) = :			
(أ) هـ + ٥	(ب) ٥	(جـ) هـ – ٥	(د) هـ + ٤

٩	فلسطين : ٢٠١١ — $\int \frac{هـ^{س+1}}{هـ^{س-1}}$ د س =
أ) $\frac{هـ^{3}}{3}$ + جـ	ب) − س + جـ
جـ) لو$_{هـ}$ (هـ$^{س+1}$) + جـ	د) هـ^{2}س + جـ
١٠	أردن : ٢٠٠٨ صيفي — $\int \frac{د\ س}{جتا^{2}س - 1}$ = :
أ) − ظتاس + جـ	ب) ظاس + جـ
جـ) ظتاس + جـ	د) − ظاس + جـ
١١	$\int$ قا^{2}س × قتا^{2}س د س = :
أ) ظاس × ظتاس + جـ	ب) ظاس + ظتاس + جـ
جـ) ظا^{2}س − ظتا^{2}س + جـ	د) ظاس − ظتاس + جـ
١٢	فلسطين : ٢٠٢٠ — إذا كان ق (س) = $\frac{د}{د\ س}$ (١ − $\sqrt{س}$) فأي العبارات تمثل $\int$ ق (س) د س ؟
أ) − $\frac{1}{2}$ $\sqrt{س}$ + جـ	ب) س − $\sqrt{س}$ + جـ
جـ) − $\sqrt{س}$ + جـ	د) س − $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ + جـ
١٣	فلسطين : ٢٠٢٠ — أي المقادير الآتية تساوي $\int$ ٤ظتا٢س د س ؟
أ) ٢ لو$_{هـ}$ | قتا٢س | + جـ	ب) لو$_{هـ}$ | جتا٢س | + جـ
جـ) ٢ لو$_{هـ}$ | قا٢س | + جـ	د) ٢ لو$_{هـ}$ | جا٢س | + جـ

إجابات الإختيار من متعدد (قواعد وخواص التكامل غير المحدود)

١	د	− قتاس + جـ	٢	ب	ظاس + جـ	٣	أ	هـ^{3}س + جـ
٤	أ	− ظتاس − ظاس + جـ	٥	د	− $\frac{1}{4}$ جتا ٢س + جـ	٦	ب	$\frac{5}{8}\sqrt[5]{س^{8}}$ + $\frac{9}{س}$ + جـ
٧	جـ	٨	٨	أ	هـ + ٥	٩	د	هـ^{2}س + جـ
١٠	جـ	ظتاس + جـ	١١	د	ظاس − ظتاس + جـ	١٢	جـ	− $\sqrt{س}$ + جـ
١٣	د	٢ لو$_{هـ}$ | جا٢س | + جـ						

ورقة عمل (٢) قواعد وخواص التكامل غير المحدود

تكاملات مباشرة (يمكن حلها بدون طرق التكامل)

رقم	التكامل	الإجابة
١	$\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$	$-\text{قتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$
٢	$\int \frac{١}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{ظا٢س} - \frac{١}{٢}\ \text{قا٢س} + \text{جـ}$
٣	$\int (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٢}\ \text{د س} =$:	$\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - \text{س}^{-١} + \text{جـ}$
٤	$\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{د س}$	$\frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{جا٢س}}{٤} + \text{جـ}$
٥	$\int \frac{٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٨}{\text{س} + ١}\ \text{د س} =$:	$\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + \text{جـ}$
٦	$\int \frac{١}{١ + \text{جتا ٣س}}\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٣}\ \text{ظتا٣س} + \frac{١}{٣}\ \text{قتا٣س} + \text{جـ}$
٧	$\int \frac{\text{جتا}^{٣} - ١}{\text{جتاس} - ١}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{س} + \frac{١}{٤}\ \text{جا٢س} + \text{جاس} + \text{س} + \text{جـ}$
٨	$\int \frac{(\text{س} - ٢)^{٣} + ٨}{\text{س}}\ \text{د س} =$:	$\frac{(\text{س} - ٢)^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} + ٨\text{س} + \text{جـ}$
٩	$\int \sqrt{١ - \text{جتا س}}\ \text{د س}$ ، $٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢}$	$-٢\sqrt{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{س}}{٢} + \text{جـ}$
١٠	$\int \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}} + ٢}\ \text{د س}$	$\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$
١١	$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س} + ١} + \sqrt{\text{س}}} =$:	$\frac{٢}{٣}(\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣}\ \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$
١٢	$\int \frac{\text{د س}}{١ - \text{جتاس}}$	$-\text{ظتاس} - \text{قتاس} + \text{جـ}$
١٣	$\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٤}\text{س}}\ \text{د س}$	$-٢\text{ظتا٢س} + \text{جـ}$

١٤	$\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - \text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س} = :$	$\frac{6}{5}\sqrt[6]{\text{س}^5} - \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3} + \text{ج}$
١٥	$\int \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س} - 2}\ \text{د س}$	$\frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س}^2 + 4\text{س} + \text{ج}$
١٦	$\int \sqrt{8 - 8\ \text{جتا}\ 2\text{س}}\ \text{د س}$ ، $0 < \text{س} < \frac{\pi}{2}$	$-\ 4\ \text{جتاس} + \text{ج}$
١٧	$\int \frac{\text{س}^3\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}\ \text{د س} = :$	$\frac{2}{7}\sqrt{\text{س}^7} + \text{ج}$
١٨	$\int \text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{د س}$	$\frac{1}{8}\left(\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}4\text{س}\right) + \text{ج}$
١٩	$\int \text{جتا}^4\text{س}\ \text{د س}$	$\frac{3}{8}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \frac{1}{32}\text{جا}4\text{س} + \text{ج}$
٢٠	$\int (9\text{س}^2 + 12\text{س} + 4)^5\ \text{د س} = :$	$\frac{(3\text{س} + 2)^{11}}{33} + \text{ج}$
٢١	$\int \frac{\text{جتا}3\text{س}}{\text{جتاس}}\ \text{د س}$	$\text{جا}2\text{س} - \text{س} + \text{ج}$
٢٢	$\int \frac{25\text{س}^2 - 4}{2 - 5\text{س}}\ \text{د س} = :$	$-\frac{5}{2}\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{ج}$
٢٣	$\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^4\ \text{د س} = :$	$\frac{3}{2}\text{س} - \text{جتا}2\text{س} - \frac{1}{8}\text{جا}4\text{س} + \text{ج}$
٢٤	$\int \frac{\text{د س}}{1 + \text{جتاس}}$	$-\ \text{ظتاس} + \text{قتاس} + \text{ج}$
٢٥	$\int \frac{1}{1 + \text{قاس}}\ \text{د س}$	$-\ \text{قتاس} + \text{ظتاس} + \text{س} + \text{ج}$
٢٦	أردن : ٢٠١٥ شتوي $\int \frac{5\text{جا}^2\text{س} + 5\text{جتا}^2\text{س}}{3 + 3\ \text{جتا}2\text{س}}\ \text{د س}$	$\frac{5}{6}\ \text{ظا س} + \text{ج}$
٢٧	$\int \frac{\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + \text{س} + 1}{(\text{س} + 1)^2}\ \text{د س} = :$	$\frac{\text{س}^2}{2} - (\text{س} + 1)^{-1} + \text{ج}$
٢٨	$\int (\text{جا}^4\ 2\text{س} - \text{جتا}^4\ 2\text{س})\ \text{د س} = :$	$-\frac{1}{4}\text{جا}4\text{س} + \text{ج}$
٢٩	$\int \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ظاس}\ \text{د س}$	$-\frac{1}{4}\text{جتا}2\text{س} + \text{ج}$

٣٠		$\int (\text{٢جتا}^{٢}\text{س} - ٤)\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{جا٢س} - \text{٣س} + \text{جـ}$
٣١		$\int \frac{\text{جتا}^{٤}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$	$-\ \text{ظتاس} - \frac{٣}{٢}\ \text{س} - \frac{١}{٤}\ \text{جا٢س} + \text{جـ}$
٣٢		$\int \frac{\text{د س}}{١ + \text{جا٢س}}$	$\frac{١}{٢}\ \text{ظا٢س} - \frac{١}{٢}\ \text{قا٢س} + \text{جـ}$
٣٣	أردن : ٢٠٠٠ إكمال	$\int (\text{جتاس} + \text{جاس})^{٢}\ \text{د س}$	$\text{س} - \frac{١}{٢}\ \text{جتا٢س} + \text{جـ}$
٣٤	أردن : ٢٠٠٣ شتوي	$\int \frac{\text{٢س}^{٢} - \text{س}^{٤}}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$	$\text{٢س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$
٣٥	أردن : ٢٠١٤ شتوي	$\int (\text{ظاس} + \text{قاس})^{٢}\ \text{د س}$	$\text{٢قاس} + \text{٢ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$
٣٦		$\int \frac{١ - \text{جا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{د س}$	$-\ \text{جتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$
٣٧	أردن : ٢٠٢٠	$\int \text{٢قا}^{٢}\text{س ظتا}^{٢}\text{س}\ \text{د س}$	$-٢\ \text{ظتاس} + \text{جـ}$
٣٨		$\int \frac{١}{(\text{٢س} - ١)^{٣}}\ \text{د س}$	$-\ \frac{١}{٤\,(\text{٢س} - ١)^{٢}} + \text{جـ}$
٣٩	أردن : ٢٠٢٠ تكميلي	$\int \frac{١}{(\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س})^{٢}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{ظا٢س} + \text{جـ}$

٤ – ٣ تطبيقات التكامل غير المحدود

ملخص الدرس

تشمل التطبيقات على التكامل غير المحدود تطبيقات هندسية ، تطبيقات فيزيائية ، معادلات تفاضلية (كتابة متغير بدلالة آخر)

أولاً : تطبيقات هندسية

بشكل عام نعني بالتطبيقات الهندسية للتكامل غير المحدود إيجاد قاعدة الإقتران ق(س) :

بمعلومية ق'(س) أو ق''(س) أو ق'''(س) أو ....

مثال

إذا كان ق''(س) = جتاس وكان ق'(π) = ٢ ، ق(π) = ١ فجد قاعد الإقتران ق(س) .

الحل

ق'(س) = $\int$ ق''(س) د س = $\int$ جتاس د س = جاس + $ج_{١}$

∵ ق'(π) = ٢ ⇐ جا π + $ج_{١}$ = ٢ ⇐ $ج_{١}$ = ٢ ⇐ ق'(س) = جاس + ٢

ق(س) = $\int$ ق'(س) د س = $\int$ (جاس + ٢) د س = − جتاس + ٢س + $ج_{٢}$

∵ ق(π) = ١ ⇐ − جتا π + ٢ π + $ج_{٢}$ = ١ ⇐ $ج_{٢}$ = −٢ π ⇐ ق(س) = − جتاس + ٢س − ٢ π

مثال

إذا كان ق (س) يمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٥ ، أ) وكان ق'(س) = ٢س فإن قيمة الثابت أ تساوي .

(أ) −٢٦ (ب) ١٣ (ج) ٢٤ (د) −١٢

الحل

ق(س) = $\int$ ق'(س) د س = $\int$ (٢س) د س = $س^{٢}$ + ج

∵ ق(٢) = ٣ ⇐ ٤ + ج = ٣ ⇐ ج = −١ ⇐ ق(س) = $س^{٢}$ − ١

∵ ق(٥) = أ ⇐ ٢٥ − ١ = أ ⇐ أ = ٢٤ (الإجابة الفرع (ج))

مثال

إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)$ فجد قاعدة الإقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة $\left(١ ، \frac{٢}{٣}\right)$.

الحـــــل

ميل المماس $ق'(س) = \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$

$$ق(س) = \int ق'(س)\ د س = \int \left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) د س = \int \left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) د س$$

$$\Leftarrow\ ق(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

ق(س) يمر بالنقطة $\left(١ ، \frac{٢}{٣}\right) \Leftarrow ق(١) = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \frac{٢}{٣} + ٢ + جـ = \frac{٢}{٣} \Leftarrow جـ = -٢$

$$\Leftarrow\ ق(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}} - ٢$$

ثانياً : تطبيقات فيزيائية

يمكن اختصار المقصود بالتطبيقات الفيزيائية للتكامل غير المحدود بالمخطط الآتي والذي يبين العلاقة بين البعد ف (ن) والسرعة ع (ن) و التسارع ت (ن) في التفاضل والتكامل .

ف (ن) ⇄ ع (ن) ⇄ ت (ن)

(بالتكامل: من ت (ن) إلى ع (ن) ومن ع (ن) إلى ف (ن) ، بالإشتقاق: من ف (ن) إلى ع (ن) ومن ع (ن) إلى ت (ن))

ملاحظة

في مسائل التطبيقات الفيزيائية للتكامل غير المحدود :

يعطيك ف أو ع أو ت بدلالة ن عندها نكامل مباشرة : ف (ن) = $\int$ ع (ن) د ن ، ع (ن) = $\int$ ت (ن) د ن

مثال

بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة $ع = ٣ن^{٢} + ٢ن$

فما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟

الحـــل

$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن \Leftarrow ف(ن) = \int ع(ن)\, ءن = \int (٣ن^{٢} + ٢ن)\, ءن = ن^{٣} + ن^{٢} + جـ$

$\because ف(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = ٠ \Leftarrow ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢}$

$\Leftarrow$ بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة $= ف(٢) = ٢^{٣} + ٢^{٢} = ١٢$ متراً

ورقة عمل (١) تطبيقات التكامل غير المحدود

إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كان ق َ (س) = جاس – جتاس ، فإن ق (س) =			
ﺃ $\frac{١}{٢}$ جا^{٢}س + ج	ب $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢}س + ج	ج جتا^{٢}س + ج	د جا^{٢}س + ج
٢ تحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كان تسارعه في اللحظة n يساوي (٢ n + ٣) م / ث^{٢} فإذا كانت سرعته الإبتدائية تساوي ١ م / ث فإن سرعته بعد ثانيتين من بدء الحركة تساوي :			
ﺃ ٧ م / ث	ب ١٥ م / ث	ج ١٠ م / ث	د ١١ م / ث
٣ نابلس : ٢٠١٩ تجريبي — بدأ جسم الحركة من نقطة الأصل فكانت سرعته ع (n) = (٢ n + ﺃ) م / ث فإذا قطع مسافة ٤٠ متر خلال ثانيتين من من بدء الحركة فإن قيمة ﺃ تساوي :			
ﺃ ٢٠	ب ١٨	ج ١٦	د ١٤
٤ فلسطين : ٢٠١٦ — يتحرك جسم على خط مستقيم من نقطة الأصل بسرعة إبتدائية مقدارها ٣ سم / ث وبتسارع مقداره ٢ n + ١ سم / ث^{٢} فإن سرعة الجسم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي :			
ﺃ ٢ سم / ث	ب ٣ سم / ث	ج ٤ سم / ث	د ٥ سم / ث
٥ بدأ جسم حركته بحيث كان بعده عن نقطة الأصل يساوي ١ سم وسرعته بعد n ثانية معطاة بالقاعدة ع (n) = $\sqrt{n}$ – $\frac{١}{\sqrt{n}}$ فإن المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٤ ثوان من بدء الحركة تساوي			
ﺃ $\frac{٤}{٣}$ سم	ب $\frac{٢}{٣}$ سم	ج – $\frac{١}{٣}$ سم	د $\frac{٧}{٣}$ سم
٦ فلسطين : ٢٠٢٠ — رسم مماس لمنحنى الإقتران ص = ق (س) عند النقطة (س ، ص) فكان ميل العمودي على المماس عند نقطة التماس يساوي $\sqrt{١ - س}$ فما قيمة ق (–٣) علماً بأن ق (٠) = ١ ؟			
ﺃ ٣	ب ٧	ج ٥	د ١-

إجابات الإختيار من متعدد (تطبيقات التكامل غير المحدود)

١	أ	$\frac{1}{2}$ جا^{2}س + جـ	٢	د	١١ م / ث	٣	ب	١٨
٤	د	٥ سم / ث	٥	د	$\frac{7}{3}$ سم	٦	أ	٣

ورقة عمل (٢) تطبيقات التكامل غير المحدود

١	إذا كان ق ً(س) = جاس – جتاس ، قَ (π) = صفر ، ق (٠) = –١ ، جد قاعدة الإقتران ق (س) .	ق(س) = – جاس + جتاس – س – ٢
٢	قباطية : ٢٠٠٨ تجريبي منحنى يمر بالنقاط (١ ، ٤) ، (٣ ، ١٤) وميله عند أي نقطة (س ، ص) الواقعة عليه يعطى بالعلاقة قَ (س) = ٤س – ج جد قيمة ج ثم جد قاعدة الإقتران .	ج = ٣ ق(س) = ٢س^{٢} – ٣س + ٥
٣	فلسطين : ٢٠٠٩ دراسات إذا كانت سرعة الجسيم في اللحظة ن يعطى بالعلاقة ع (ن) = جتا ٢ ن وكان الجسيم على بعد ٤م عند بدء الحركة ، جد بعد هذا الجسيم عندما ن = $\frac{\pi}{٤}$.	$\frac{٩}{٢}$ م
٤	فلسطين : ٢٠٠٧ دراسات يتحرك جسم بتسارع يعطى بالعلاقة ت = (١٢ ن – ٢) م/ث^{٢} فإذا كانت السرعة الإبتدائية ٤م/ث والمسافة المقطوعة بعد ٣ثوان هي ٢٨ فأوجد المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة .	٢١٦ م
٥	فلسطين : ٢٠١٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ق (س) عند أي نقطة عليه يساوي أ س – ٣ س^{٢} جد قاعدة الإقتران ق (س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ يمس منحنى الإقتران عند النقطة (١، ق (١))	ق(س) = س^{٢} – س^{٣} + ٣
٦	فلسطين : ٢٠١٤ جد معادلة المنحنى ص = ق (س) علماً بأن ص ً = ٢جتا٢س ومعادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ١) هي ص = س + ١ .	ق(س) = – $\frac{١}{٢}$ جتا٢س + س + $\frac{٣}{٢}$
٧	إذا كان قَ(س) = ٢ هـ^{٢س} جد ق (س) علماً بأنه يمر بالنقطة (٠ ، ٤)	ق (س) = هـ^{٢س} + ٣
٨	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ص = ق (س) عند النقطة (١ ، ٨) الواقعة عليه يساوي ٤ وكان ق ً(س) = ١٢س – ٢ جد قاعدة الإقتران .	ق(س) = ٢س^{٣} – س^{٢} + ٧
٩	فلسطين : ٢٠١٥ يتحرك جسم في خط مستقيم بتسارع يعطى بالعلاقة ت = (٣ ن^{٢} + ن) م/ث^{٢} فإذا كانت السرعة بعد ثانيتين من بدء الحركة = ٣ أمثال سرعته الإبتدائية فما سرعته بعد ٣ ثواني من بدء الحركة علماً بأن المسافة بالأمتار .	٣٦,٥ م/ث


١٠	قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة إبتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره −١٠ م/ث^{٢} فإذا كان أقصى إرتفاع وصل إليه الجسم عن سطح الأرض ١٢٥ م فجد إرتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من بدء حركته .	٨٠ م
١١	نابلس : ٢٠١٩ تجريبي — أوجد معادلة منحنى الإقتران ص = ق (س) علماً بأن ص″ = ٤جتا٢س ومعادلة المماس للمنحني ق (س) عند النقطة (٠ ، ١) هي س + ١ − ص = ٠	ق(س) = − جتا٢س + س + ٢
١٢	فلسطين : ٢٠٠٧ — إذا كان ق″ (س) = ٦س − ٤ وكان للإقتران ق(س) قيمة صغرى محلية تساوي ٥ عند س = ١ فجد معادلة المنحنى والقيمة العظمى المحلية للإقتران .	ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + س + ٥ $\frac{١٣٩}{٢٧}$
١٣	إذا كان ق′ (س) = أ + ٣ب س^{٢} جد قيم الثوابت أ ، ب علماً بأن ميل المماس لمنحنى ق (س) عند نقطة الأصل يساوي $\frac{٢}{٣}$ وأن منحنى ق (س) يمر بالنقطة (١ ، ٢) .	$\frac{٤}{٣}$
١٤	إذا علمت أن ق″ (س) = جاس + هـ^{س} جد قاعدة الإقتران ق(س) علماً بأن : ق′(٠) = ق (٠) = ٣	− جاس + هـ^{س} + ٣س + ٢
١٥	فلسطين : ٢٠٢٠ (من الكتاب المقرر) — يتحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها بسرعة إبتدائية مقدارها ٣ م/ث فإذا كان تسارعه في أي لحظة = (ن) م/ث^{٢} فما سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني ؟	$\frac{٣١}{٢}$ م/ث $\frac{٢١٥}{٦}$ م

٤ – ٤ طرق التكامل

ملخص الـــدرس

أولاً : التكامل بالتعويض

نلجأ لطريقة التكامل بالتعويض (الفرض) إذا كان لدينا حاصل ضرب إقترانين بينهما علاقة إشتقاق إما **مباشرة** أو **قريبة منها** .

والصورة المباشرة للتكامل بالتعويض تكون على النحو : $\int$ ق(هـ (س)) هـَ(س) د س ومن حالات التكامل بالتعويض :

- التعويض المباشر للتكاملات على الصورة $\int$ ق(هـ (س)) هـَ(س) د س
- التعويض ثم الرجوع للفرض
- التحليل ثم التعويض للتكاملات على الصورة
- التعويض مرتين
- المتطابقات ثم التعويض

خطوات إجراء التكامل بالتعويض

خطوات حساب التكامل على الصورة : $\int$ ق(هـ (س)) هـَ(س) د س يكون حسب الخطوات الآتية :

١) نفرض أن ع = هـ (س)

٢) نشتق الطرفين بالنسبة إلى س حيث $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = هـَ(س)

٣) نجعل د س موضوع القانون حيث دس = $\frac{\text{د ع}}{\text{هـَ(س)}}$

٤) نعوض في التكامل $\int$ ق(هـ (س)) هـَ(س) د س عن قيم هـ (س) ، د س ينتج :

$\int$ ق(هـ (س)) هـَ(س) د س = $\int$ ق(ع) × هـَ(س) × $\frac{\text{د ع}}{\text{هـَ(س)}}$ وبالإختصار = $\int$ ق(ع) د ع

٥) نحسب $\int$ ق(ع) د ع


ملاحظة

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ قابلاً للتكامل فإن $\int \text{ق}'(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})\ \text{د}\text{س} = \frac{١}{\text{أ}}\ \text{ق}(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}) + \text{ج}$ حيث أ ، ب ، ج $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

مثال

- $\int (٣\text{س} + ١)^{٥}\ \text{د}\text{س} = \frac{١}{٣} \times \frac{(٣\text{س} + ١)^{٦}}{٦} + \text{ج} = \frac{(٣\text{س} + ١)^{٦}}{١٨} + \text{ج}$

لاحظ أن : $\int (\text{س})^{٥}\ \text{د}\text{س} = \frac{\text{س}^{٦}}{٦} + \text{ج}$

- $\int \text{جتا}(٣\text{س} + ١)\ \text{د}\text{س} = \frac{١}{٣}\ \text{جا}(٣\text{س} + ١) + \text{ج}$ لأن : $\int \text{جتا}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = \text{جا}(\text{س}) + \text{ج}$

- $\int \text{هـ}^{(٩\text{س} - ٤)}\ \text{د}\text{س} = \frac{١}{٩}\ \text{هـ}^{(٩\text{س} - ٤)} + \text{ج}$ لأن: $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{د}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

- $\int \text{قا}^{٢}(٧\text{س} + \frac{١}{٩})\ \text{د}\text{س} = \frac{١}{٧}\ \text{ظا}(٧\text{س} + \frac{١}{٩}) + \text{ج}$ لأن : $\int \text{قا}^{٢}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = \text{ظا}(\text{س}) + \text{ج}$

- $\int \text{قتا}(٢\text{س} - ٦)\ \text{ظتا}(٢\text{س} - ٦)\ \text{د}\text{س} = -\frac{١}{٢}\ \text{قتا}(٢\text{س} - ٦) + \text{ج}$

لأن : $\int \text{قتا}(\text{س})\ \text{ظتا}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = -\text{قتا}(\text{س}) + \text{ج}$

قاعدة

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\ \text{د}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ق}(\text{س})| + \text{ج} \quad ، \quad \text{ق}(\text{س}) \neq ٠$$

مثال

- $\int \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}\ \text{د}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤| + \text{ج}$ لأن البسط عبارة عن مشتقة المقام

- $\int \text{ظتاس}\ \text{د}\text{س} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{د}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{ج}$ لأن البسط عبارة عن مشتقة المقام

- $\int \frac{١}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د}\text{س} = \int \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|) + \text{ج}$ لأن البسط عبارة عن مشتقة المقام

مثال جد ∫ قا^{٤} (س) ظا^{٢} (س) د س

الحـــل

∫ قا^{٤} (س) ظا^{٢} (س) د س = ∫ قا^{٢} (س) قا^{٢} (س) ظا^{٢} (س) د س

= ∫ قا^{٢} (س) (ظا^{٢} (س) + ١) ظا^{٢} (س) د س = ∫ قا^{٢} (س) (ظا^{٤} (س) + ظا^{٢} (س)) د س

نفرض ع = ظاس ⇐ $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = قا^{٢} (س) ⇐ د س = $\frac{\text{د ع}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

يصبح التكامل = ∫ قا^{٢} (س) (ع^{٤} + ع^{٢}) × $\frac{\text{د ع}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ = ∫ (ع^{٤} + ع^{٢}) د ع

= $\frac{\text{ع}^{٥}}{٥}$ + $\frac{\text{ع}^{٣}}{٣}$ + جـ = $\frac{\text{ظا}^{٥}\text{س}}{٥}$ + $\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

ثانياً : التكامل بالأجزاء

الطريقة الثانية من طرق التكامل ونلجأ لطريقة التكامل بالأجزاء عندما يكون لدينا حاصل ضرب إقترانين أحدهما سهل الإشتقاق والآخر سهل التكامل ونقوم بتسمية الإقتران سهل الإشتقاق ٯ وباقي أجزاء التكامل وهو (الإقتران الآخر × د س) نسميه د ع يصبح التكامل على الصورة ∫ ٯ × د ع والذي يساوي ٯ × ع – ∫ ع × د ٯ أي أن قاعدة التكامل بالآجزاء :

∫ ٯ × د ع = ٯ × ع – ∫ ع × د ٯ

مثال توضيحي :

لحساب التكامل ∫ س جاس د س

لاحظ أننا أمام إقترانين هما الإقتران (س) سهل الإشتقاق والإقتران الآخر (جاس) سهل التكامل

نقوم بفرض الإقتران (س) سهل الإشتقاق = ٯ وباقي أجزاء التكامل وهي جاس د س = د ع يصبح التكامل = ∫ ٯ × د ع

والذي نحصل عليه بتطبيق قاعدة التكامل بالأجزاء : ∫ ٯ × د ع = ٯ × ع – ∫ ع × د ٯ

ومن بعض حالات التكامل بالأجزاء التي نصادفها :

- الأجزاء مرة واحدة
- الأجزاء اكثر من مرة
- الأجزاء الدوَّار
- التعويض ثم الأجزاء
- المتطابقات أو التحليل ثم الأجزاء

ملاحظة

هناك أولوية لفرض الإقتران ه(س) سهل الإشتقاق ويمكن ترتيب هذه الأولوية على النحو التالي :

- الإقترانات اللوغاريتمية (ل)
- كثيرات الحدود (ك)
- الإقترانات الدائرية (د)
- الإقتران الأسي (س)

ويمكن جمعها في كلمة (لكدس) لسهولة الحفظ

مثال جد $\int \frac{\text{س} + ٢}{\text{قاس قتاس}} \, \text{د س}$

الحل

$$\int \frac{\text{س} + ٢}{\text{قاس قتاس}} \, \text{د س} = \int (\text{س} + ٢)\ \text{جا س جتا س د س} = \int (\text{س} + ٢) \times \frac{١}{٢}\ \text{جا} (٢\text{س})\ \text{د س}$$

$\text{ه} = \text{س} + ٢$ ، $\text{د ع} = \frac{١}{٢}\ \text{جا} (٢\text{س})\ \text{د س}$

$\text{د ه} = \text{د س}$ ، $\text{ع} = \int \frac{١}{٢}\ \text{جا} (٢\text{س})\ \text{د س} = -\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٤}$

$$\Leftarrow \int \text{ه} \times \text{د ع} = \text{ه} \times \text{ع} - \int \text{ع} \times \text{د ه} = (\text{س} + ٢) \times \left(-\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٤}\right) - \int -\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٤}\ \text{د س}$$

$$= -\frac{١}{٤} (\text{س} + ٢)\ \text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٨}\ \text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$$

ملاحظة

هناك حالة خاصة للتكامل بالأجزاء عندما يكون التكامل عبارة عن مجموع تكاملين الأول يتكون من حاصل ضرب إقترانين والآخر عبارة عن حصل ضرب مشتقة أحدهما في تكامل الآخر مثال على ذلك : $\int$ هـ^{س} (قتاس – قتاس ظتاس) د س فيمكن كتابته على الصورة $\int$ هـ^{س} قتاس د س + $\int$ – هـ^{س} قتاس ظتاس د س حيث التكامل الأول عبارة عن ضرب الإقترانين قتاس ، هـ^{س} والتكامل الآخر عبارة حاصل ضرب مشتقة قتاس وتكامل هـ^{س} ويمكن حل هذا التكامل بالأجزاء حيث يتسبب الأجزاء في حذف التكامل الآخر على النحو الموضح في المثال التالي :

مثال

جد $\int$ هـ^{س} (قتاس – قتاس ظتاس) د س

الحل

$\int$ هـ^{س} (قتاس – قتاس ظتاس) د س = $\int$ هـ^{س} قتاس د س – $\int$ هـ^{س} قتاس ظتاس د س

نجد التكامل $\int$ هـ^{س} قتاس د س بالأجزاء

و = قتاس　　　　د ع = هـ^{س} د س

د و = – قتاس ظتاس د س　　　　ع = $\int$ هـ^{س} د س = هـ^{س}

× ، – $\int$

⇐ $\int$ هـ^{س} قتاس د س = هـ^{س} × قتاس – $\int$ – هـ^{س} قتاس ظتاس د س

⇐ $\int$ هـ^{س} قتاس د س = هـ^{س} × قتاس + $\int$ هـ^{س} قتاس ظتاس د س

⇐ $\int$ هـ^{س} (قتاس – قتاس ظتاس) د س = هـ^{س} × قتاس + $\int$ هـ^{س} قتاس ظتاس د س – $\int$ هـ^{س} قتاس ظتاس د س

⇐ $\int$ هـ^{س} (قتاس – قتاس ظتاس) د س = هـ^{س} قتاس + جـ

ثالثاً : التكامل بالكسور الجزئية

متطلب هام : تجزئة الكسر

عملية تجزئة الكسر يقصد بها : كتابة الإقتران النسبي الذي درجة بسطه أقل من مقامه ويمكن تحليل مقامه إلى جذور مختلفة على شكل مجموع إقترانات نسبية أخرى

إذا كان لدينا الكسر = $\frac{س + ٢}{س^٢ - ١}$ فإننا نقوم بتجزئة الكسر على النحو التالي :

- نحلل المقام إلى عوامله : $\frac{س + ٢}{س^٢ - ١} = \frac{س + ٢}{(س + ١)(س - ١)}$
- نكتب الكسر على صورة مجموع كسرين : $\frac{س + ٢}{(س + ١)(س - ١)} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{ب}{س - ١}$
- نوحد المقامات : $\frac{س + ٢}{(س + ١)(س - ١)} = \frac{أ(س - ١) + ب(س + ١)}{(س + ١)(س - ١)}$
- من تساوي كسرين لهما نفس المقام ينتج أن : $أ(س - ١) + ب(س + ١) = س + ٢$
- الآن لإيجاد قيم أ ، ب نعوض بدل س بالأصفار كما يلي :

عندما س = ١ $\Leftarrow$ $أ(١ - ١) + ب(١ + ١) = ١ + ٢$ $\Leftarrow$ $٢ب = ٣$ ومنها $ب = \frac{٣}{٢}$

عندما س = −١ $\Leftarrow$ $أ(-١ - ١) + ب(-١ + ١) = -١ + ٢$ $\Leftarrow$ $-٢أ = ١$ ومنها $أ = -\frac{١}{٢}$

- بناءً على ما سبق يكون : $\frac{س + ٢}{س^٢ - ١} = \frac{-\frac{١}{٢}}{س + ١} + \frac{\frac{٣}{٢}}{س - ١}$

الطريقة الثالثة من طرق التكامل وهي التكامل بالكسور الجزئية ونلجأ إليها عندما يكون لدينا إقتران نسبي درجة بسطه أقل من درجة مقامه ولا يكون للبسط علاقة بمشتقة المقام والمقام يمكن تحليله إلى عوامل مختلفة وغالباً ما نعتمد في استخدامنا للتكامل بالكسور الجزئية على القاعدة : $\int \frac{أ}{ب س + د} \, د س = \frac{أ}{ب} \text{لو}_{هـ} |ب س + د| + جـ$

وعندما تكون درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام فإننا نبدأ أولاً بالقسمة الطويلة وناتج القسمة هو الذي يحدد فيما إذا كنا بحاجة لاستخدام التكامل بالكسور الجزئية أم لا

مثال جد $\int \frac{٤س + ١}{س^٢ - س - ٢}$ د س

الحل

نقوم بتجزئة الكسر حيث نحلل المقام $س^٢ - س - ٢ = (س - ٢)(س + ١)$

$$\frac{٤س + ١}{(س - ٢)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ٢} + \frac{ب}{س + ١}$$

$\Leftarrow$ أ $(س + ١) +$ ب $(س - ٢) = ٤س + ١$

لإيجاد قيم أ ، ب نعوض بدل س بالأصفار كما يلي :

عندما س = −١ $\Leftarrow$ أ $(-١ + ١) +$ ب $(-١ - ٢) = -٤ + ١$ $\Leftarrow$ -٣ب $= -٣$ ومنها ب = ١

عندما س = ٢ $\Leftarrow$ أ $(٢ + ١) +$ ب $(٢ - ٢) = ٨ + ١$ $\Leftarrow$ ٣أ = ٩ ومنها أ = ٣

بناءً على ما سبق يكون : $\frac{٤س + ١}{س^٢ - س - ٢} = \frac{٣}{س - ٢} + \frac{١}{س + ١}$

$$\Leftarrow \int \frac{٤س + ١}{س^٢ - س - ٢}\, د س = \int \left(\frac{٣}{س - ٢} + \frac{١}{س + ١}\right) د س = \int \frac{٣}{س - ٢}\, د س + \int \frac{١}{س + ١}\, د س$$

$$= ٣ \text{لو}_{هـ} |س - ٢| + \text{لو}_{هـ} |س + ١| + ج$$

ورقة عمل (١) — طرق التكامل

إختر الإجابة الصحيحة

١) $\int \frac{١}{س}\ \text{جا}\left(\text{لو}_{هـ}(س)\right) د\,س =$:

أ) $\frac{\text{جتا}\left(\text{لو}_{هـ}(س)\right)}{س^{٢}} +$ جـ	ب) $-\frac{\text{جتا}\left(\text{لو}_{هـ}(س)\right)}{س^{٢}} +$ جـ
جـ) $-\text{جتا}\left(\text{لو}_{هـ}(س)\right) +$ جـ	د) $\text{جتا}\left(\text{لو}_{هـ}(س)\right) +$ جـ

٢) فلسطين : ٢٠١٩

إذا علمت $\int س^{٢}\ \text{جتا}س\ د\,س = س^{٢}\ \text{جا}س + \int ع\ د\,ع$ فما قيمة ع د ع ؟

أ) س جاس د س	ب) س جتاس د س	جـ) ٢س جاس د س	د) − ٢س جاس د س

٣) بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان $\int ٢س\ \text{لو}_{هـ}(س)\ د\,س = س^{٢}\ \text{لو}_{هـ}(س) - \int ع\ د\,ع$ فما قيمة ع د ع ؟

أ) $\text{لو}_{هـ}(س)$ د س	ب) س $\text{لو}_{هـ}(س)$ د س	جـ) س د س	د) $س^{٢}$ د س

٤) $\int \frac{س}{س^{٢}-١}\ د\,س =$:

أ) $\text{لو}_{هـ}\sqrt{س^{٢}-١} +$ جـ	ب) $\text{لو}_{هـ}(س^{٢}-١)^{٢} +$ جـ
جـ) $\text{لو}_{هـ}(س-١) + \text{لو}_{هـ}(س+١) +$ جـ	د) $\text{لو}_{هـ}(س^{٢}-١) +$ جـ

٥) أردن : ٢٠٠٩ صيفي

$\int \left(\frac{\text{قا}س}{\text{جتا}س} + \frac{١}{هـ^{س}}\right) د\,س =$:

أ) ظاس − $هـ^{-س}$ + جـ	ب) − ظاس + $هـ^{س}$ + جـ
جـ) ظاس + $هـ^{س}$ + جـ	د) س − $هـ^{-س}$ + جـ

٦) $\int \frac{\text{جا}٢س}{\text{جا}^{٢}س + ١}\ د\,س =$:

أ) $\text{لو}_{هـ}\left|\text{جتا}^{٢}س + ١\right| +$ جـ	ب) $\text{لو}_{هـ}\left|٢\text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س\right| +$ جـ
جـ) $\text{لو}_{هـ}\left|\text{جا}^{٢}س - ١\right| +$ جـ	د) $\text{لو}_{هـ}\left|\text{جا}٢س\right| +$ جـ

٧	$\int \frac{س}{س - ٤}$ د س = :
Ⓐ س + لو$_{هـ}$ | س − ٤ | + جـ	Ⓑ س − ٤لو$_{هـ}$ | س − ٤ | + جـ
Ⓒ ٤لو$_{هـ}$ | س − ٤ | + جـ	Ⓓ س + ٤لو$_{هـ}$ | س − ٤ | + جـ

٨	$\int$ ظتاس د س = :		
Ⓐ لو$_{هـ}$ | جاس | + جـ	Ⓑ لو$_{هـ}$ | قاس | + جـ	Ⓒ لو$_{هـ}$ | قتاس | + جـ	Ⓓ − لو$_{هـ}$ | جتاس | + جـ

٩ شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي

ما قيمة ن التي تجعل $\int \frac{س^{ن}}{(س^{٥} + ٢)^{-٦}}$ د س = $\frac{(س^{٥} + ٢)^{٧}}{٣٥}$ + جـ ؟

Ⓐ ٤	Ⓑ ٥	Ⓒ ٦	Ⓓ ٧

١٠ بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ص = ق(س) عند أي نقطة عليه = $\sqrt{هـ^{س}}$ فإن ق (٢) − ق (٠) =

Ⓐ ٢ − ٢هـ	Ⓑ ٢هـ − ٢	Ⓒ $\frac{١ - هـ}{٢}$	Ⓓ $\frac{هـ - ١}{٢}$

١١ فلسطين : ٢٠٢٠

$\int س^{٦} \left(\frac{١ - س}{س}\right)^{٦}$ د س = :

Ⓐ $\left(\frac{-س + ١}{-٧}\right)^{٧}$ + جـ	Ⓑ ٦ (−س + ١)^{٥} + جـ
Ⓒ $\frac{١}{٧}$ س^{٧} (−لو$_{هـ}$ س + $\frac{١}{س}$) + جـ	Ⓓ − $\frac{١}{٧}$ (١ − س)^{٧} + جـ

١٢ فلسطين : ٢٠٢٠ ما ناتج $\int$ قا^{٩}س ظاس د س ؟

Ⓐ $\frac{١}{٩}$ قا^{٩}س + جـ	Ⓑ $\frac{١}{١٠}$ قا^{١٠}س + جـ	Ⓒ $\frac{١}{٨}$ قا^{٨}س + جـ	Ⓓ $\frac{١}{٩}$ قا^{٩}س ظاس + جـ

١٣ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان ق (س) ق$'$(س) = ٣س^{٢} حيث ق (س) > ٠ فما قيمة ق ($\sqrt[٣]{٧}$) علماً بأن ق (١) = ٢ ؟

Ⓐ ٣	Ⓑ ٤	Ⓒ ٥	Ⓓ ٦


١٤ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $ق'(س) = ٤\,ق(س)$ حيث $ق(س) > ٠$ فما قيمة $ق(\frac{١}{٢})$ علماً بأن $ق'(١) = ٤$ ؟

أ) $هـ^{٢}$	ب) $هـ^{-٢}$	ج) -٤	د) ١

إجابات الإختيار من متعدد (طرق التكامل)

١	ج	$-جتا(لو_{هـ}(س)) + ج$	٢	د	$-٢س\,جاس\,د\,س$	٣	ج	$س\,د\,س$
٤	أ	$لو_{هـ}\sqrt{س^{٢}-١} + ج$	٥	أ	$ظاس - هـ^{-س} + ج$	٦	ب	$لو_{هـ}\lvert ٢جا^{٢}س + جتا^{٢}س\rvert + ج$
٧	د	$س + ٤لو_{هـ}\lvert س-٤\rvert + ج$	٨	أ	$لو_{هـ}\lvert جاس\rvert + ج$	٩	أ	٤
١٠	ب	$٢هـ - ٢$	١١	د	$-\frac{١}{٧}(١-س)^{٧} + ج$	١٢	أ	$\frac{١}{٩}قا^{٩}س + ج$
١٣	ب	٤	١٤	ب	$هـ^{-٢}$	١٥		

ورقة عمل (٢) طرق التكامل

١	إذا كان ق َ(س) = $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ جد ق (س)	ق (س) = $\frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} - \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$
٢	جد ق (س) بدلالة س علماً بأن : ق َ(س) = (ظتاس) (لو$_{هـ}$ (جاس))	ق (س) = $\frac{١}{٢}$ (لو$_{هـ}$ (جاس))^{٢} + جـ
٣	إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ س^{ن} هـ^{س} د س ، ن ∈ ط أثبت أن : ع$_{ن}$ = س^{ن} هـ^{س} − ن ع$_{ن-١}$	
٤	إذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ (لو$_{هـ}$ س)^{ن} د س ، ن ∈ ط أثبت أن : ع$_{ن}$ = س (لو$_{هـ}$ س)^{ن} − ن ع$_{ن-١}$	
٥	جنين : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان ق (س) > ٠ ، س ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [وكان ق َ(س) ظاس − ٢ ق (س) قا^{٢}س = ٠ ، ق ($\frac{\pi}{٤}$) = ١ ، جد ق ($\frac{\pi}{٣}$) .	٣
٦	فلسطين : ٢٠١٦ إكمال إذا كان $\frac{\text{لو}_{هـ}(\text{س})}{\text{ق َ}(\text{س})}$ = س ، ق َ(س) ≠ ٠ وكان ق (هـ^{٢}) = ٥ ، جد قاعدة الإقتران ق (س) .	$\frac{١}{٢}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٢} + ٣
٧	جد قاعدة الإقتران ق (س) علماً بأن ق ً (س) = ق َ(س) ، ق َ(س) ≠ ٠ وأن ق َ(٠) = ١ ، ق (٠) = ٠	هـ^{س} − ١
٨	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان هـ^{س} ق (س) + هـ^{س} ق َ(س) = جاس فما قاعدة الإقتران ق (س) المار بنقطة بالأصل ؟	$\frac{١ - \text{جتاس}}{\text{هـ}^{س}}$

ورقة عمل (٣)

طرق التكامل بالتعويض

رقم	التكامل	الإجابة
١	فلسطين : ٢٠٠٨ $\int (\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٥})^{\frac{١}{٣}}\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٨}(١ - ٣\text{س}^{٢})^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$
٢	$\int \text{س}^{-٣}(١ - ٥\text{س}^{-٢})^{٧}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٨٠}(١ - ٥\text{س}^{-٢})^{٨} + \text{جـ}$
٣	$\int \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٢\sqrt{\text{قاس}}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٣}(\sqrt{\text{قا س}})^{٣} + (\sqrt{\text{قا س}})^{-١} + \text{جـ}$
٤	فلسطين : ٢٠١٧ $\int \text{جتا}٢\text{س}(\text{جتاس} + \text{جاس})^{١٣}\ \text{د س}$	$\frac{١}{١٥}(\text{جتاس} + \text{جاس})^{١٥} + \text{جـ}$
٥	$\int \frac{٦}{\text{س}^{٢}}\sqrt[٥]{٢ - \frac{١}{\text{س}}}\ \text{د س}$	$٥\left(٢ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{\frac{٦}{٥}} + \text{جـ}$
٦	رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي $\int \left(\frac{١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}\sqrt{\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}}\right)\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}} + \text{جـ}$
٧	$\int \sqrt{٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٤}}\ \text{د س}$ ، $\text{س} > ٠$	$-\frac{١}{١٢}(٣ - ٤\text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$
٨	فلسطين : ٢٠١٠ إكمال $\int (\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)^{٧}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٩}(\text{س} - ١)^{٩} +$ $\frac{٣}{٨}(\text{س} - ١)^{٨} + \text{جـ}$
٩	فلسطين : ٢٠٠٧ $\int \frac{٣\text{س}}{\sqrt[٣]{٦\text{س} + ١}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢٠}(٦\text{س} + ١)^{\frac{٥}{٣}} - \frac{١}{٨}(٦\text{س} + ١)^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$
١٠	$\int \text{ظا}^{٤}\text{س}\ \text{د س}$	$\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ}$
١١	$\int \left(\frac{١}{\text{س}}\sqrt[٥]{\frac{١}{\text{س}^{٥}} - \frac{٢}{\text{س}^{٦}}}\right)\ \text{د س}$	$\frac{٥}{١٢}\left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{\frac{٦}{٥}} + \text{جـ}$

١٢	$\int \text{س}^{٥}(\text{س}^{٣}-٢)^{٧}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢٧}(\text{س}^{٣}-٢)^{٩} + \frac{١}{١٢}(\text{س}^{٣}-٢)^{٨} + \text{جـ}$
١٣	نابلس : ٢٠١٩ تجريبي $\int \frac{(\text{قتا٢س} + \text{ظتا٢س})^{٩}}{\text{جاس جتاس}}\,\text{د س}$	$-\frac{(\text{قتا٢س} + \text{ظتا٢س})^{٩}}{٩} + \text{جـ}$
١٤	فلسطين : ٢٠٠٧ إكمال $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+١}}\,\text{د س}$	$\frac{٢}{٣}(١+\text{س})^{\frac{٣}{٢}} - ٢(١+\text{س})^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$
١٥	$\int \text{هـ}^{\text{جا س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{قا س}}\,\text{د س}$	$\text{هـ}^{\text{جا س}} + \text{جـ}$
١٦	$\int \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\text{جا٢س}}\,\text{د س}$	$\sqrt{\text{ظا س}} + \text{جـ}$
١٧	$\int \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٣}\text{س}\,\text{د س}$	$\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣} - \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$
١٨	أردن : ٢٠١٠ صيفي $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}}\,(١+\sqrt{\text{س}})^{٤}}$	$-\frac{٢}{٣}(١+\sqrt{\text{س}})^{-٣} + \text{جـ}$
١٩	فلسطين : ٢٠١٦ $\int \frac{(\text{س}^{٣}-\text{س})^{٥}}{\text{س}^{١٨}}\,\text{د س}$	$\frac{١}{١٢}\left(١-\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٦} + \text{جـ}$
٢٠	$\int \frac{(\text{س}+٣)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\,\text{د س}$	$-\frac{١}{١٨}\left(\frac{\text{س}+٣}{\text{س}}\right)^{٦} + \text{جـ}$
٢١	$\int \text{س}^{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٥}\,\text{د س}$	$\frac{٣}{٢}\left(\frac{(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٥})^{٧}}{٧} - \frac{٥(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٥})^{٤}}{٤}\right) + \text{جـ}$
٢٢	$\int (\text{س}^{\text{ن}+٢} - ٥\text{س})^{\text{ن}}\,\text{د س}$ ، $\text{س} \in \text{ص}^{+}$	$\frac{(\text{س}^{\text{ن}+١}-٥)^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١)^{٢}} + \text{جـ}$
٢٣	$\int \frac{(\sqrt{\text{س}}+٢)^{٣}}{\text{س}^{٣}}\,\text{د س}$	$-\frac{١}{٤}\left(\frac{\sqrt{\text{س}}+٢}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{٤} + \text{جـ}$
٢٤	$\int \text{قا}^{٣}\text{س ظا}^{٣}\text{س}\,\text{د س}$	$\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥} - \frac{\text{قا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

٢٥	$\int \text{ظا}^{٣}\text{س د س}$	$\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{جتاس} \rvert + \text{جـ}$
٢٦	أردن : ٢٠٠٤ شتوي $\int \text{س}^{٥} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١}\ \text{د س}$	$\frac{٢}{١٥} \sqrt{(\text{س}^{٣} + ١)^{٥}} - \frac{٢}{٩} \sqrt{(\text{س}^{٣} + ١)^{٣}} + \text{جـ}$
٢٧	$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{١ - \sqrt{\text{س}}}}$	$-٤ \left(\sqrt{١ - \sqrt{\text{س}}} \right) + \frac{٤}{٣} \left(\sqrt{١ - \sqrt{\text{س}}} \right)^{٣} + \text{جـ}$
٢٨	$\int ٢\text{س} (\text{س}^{٢} - ٣)^{٧}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٨} (\text{س}^{٢} - ٣)^{٨} + \text{جـ}$
٢٩	أردن : ٢٠٠٢ $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس جتاس}}\ \text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{جا٢س} \rvert + \text{جـ}$
٣٠	$\int \text{ظتاس لو}_{\text{هـ}} (\text{جتاس})\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٢} (\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{جتاس}))^{٢} + \text{جـ}$
٣١	$\int \text{جا}^{٣}\text{س د س}$	$-\text{جتاس} + \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$
٣٢	$\int \text{قا}^{٤}\text{س د س}$	$\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$
٣٣	فلسطين : ٢٠١٩ $\int \frac{(\text{س} + ١)^{٣}}{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)^{٦}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{-٨ (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)^{٤}} + \frac{٣}{١٠ (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)^{٥}} + \text{جـ}$
٣٤	فلسطين : ٢٠١٣ $\int \frac{(\text{س}^{٢} + \text{س})(٢\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + \text{س} - ١)^{١٠}}\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٨} (\text{س}^{٢} + \text{س} - ١)^{-٨} - \frac{١}{٩} (\text{س}^{٢} + \text{س} - ١)^{-٩} + \text{جـ}$
٣٥	$\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س} + ١}\ \text{د س}$	$\frac{٢}{٧} (١ + \text{س})^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} (١ + \text{س})^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٣} (١ + \text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$
٣٦	جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي $\int \frac{\text{جتاس جا}^{٣}\text{س}}{١ + \text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢} (١ + \text{جا}^{٢}\text{س}) - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert ١ + \text{جا}^{٢}\text{س} \rvert + \text{جـ}$

٣٧	$\int \frac{1}{\text{جا}^{6}\text{س}}\ \text{د س}$	$-\frac{\text{ظتا}^{5}\text{س}}{5} - \frac{2\,\text{ظتا}^{3}\text{س}}{3} - \text{ظتاس} + \text{جـ}$
٣٨	$\int \text{س}^{2}\ \text{جتاس}^{3}\ \text{جا}^{2}\text{س}^{3}\ \text{د س}$	$\frac{1}{15}\left(\text{جاس}^{3}\right)^{5} + \text{جـ}$
٣٩	فلسطين : ٢٠١٧ $\int \sqrt{\text{س}^{5} - \text{س}^{3}}\ \text{د س}$	$\frac{3}{8}\left(\text{س}^{2} - 1\right)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$
٤٠	$\int \sqrt[3]{\text{س}^{3} + 5\text{س}^{5}}\ \text{د س}$	$\frac{3}{40}\left(1 + 5\text{س}^{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$
٤١	$\int \left(1 + \text{ظاس}\right)^{2}\ \text{د س}$	$-2\ \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جتاس} \mid + \text{ظاس} + \text{جـ}$
٤٢	$\int \frac{\sqrt{\text{جاس}}}{\text{قا}^{5}\text{س}}\ \text{د س}$	$\frac{2}{3}\ \text{جا}^{\frac{3}{2}}\text{س} - \frac{4}{7}\ \text{جا}^{\frac{7}{2}}\text{س} + \frac{2}{11}\ \text{جا}^{\frac{11}{2}}\text{س} + \text{جـ}$
٤٣	$\int \frac{1}{\text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{ظا}^{3}\text{س}}\ \text{د س}$	$\frac{1}{\text{ن}}\ \text{قتا}^{\text{ن}}\text{س} - \frac{1}{\text{ن}+2}\ \text{قتا}^{\text{ن}+2}\text{س} + \text{جـ}$
٤٤	$\int \frac{\text{ظتا}^{2}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س}$	$-2\,\text{ظتا}\left(\sqrt{\text{س}}\right) - \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$
٤٥	$\int \text{جتاس}\ \text{جا}^{5}\left(\text{جاس}\right)\ \text{د س}$	$-\text{جتا}\left(\text{جاس}\right) - \frac{2}{3}\ \text{جتا}^{3}\left(\text{جاس}\right) + \frac{\text{جتا}^{5}\left(\text{جاس}\right)}{5} + \text{جـ}$
٤٦	$\int \text{قاس}\ \text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{قاس} + \text{ظاس} \mid + \text{جـ}$
٤٧	$\int \frac{1}{1 + \text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{د س}$	$-\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{هـ}^{-\text{س}} + 1 \mid + \text{جـ}$
٤٨	بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي $\int \left(\frac{\text{جاس} - 1}{\text{جاس} + 1}\right)^{7} \text{قاس}\ \text{د س}$	$-\frac{1}{14}\left(\frac{\text{جاس} - 1}{\text{جاس} + 1}\right)^{7} + \text{جـ}$
٤٩	أردن : ٢٠١٣ صيفي $\int \text{قا}^{4}\left(3\text{س}\right)\ \text{ظا}^{3}\left(3\text{س}\right)\ \text{د س}$	$\frac{1}{12}\ \text{ظا}^{4}\left(3\text{س}\right) + \frac{1}{18}\ \text{ظا}^{6}\left(3\text{س}\right) + \text{جـ}$

٥٠	$\int قتا^٤(٢س)\, ظتا^٣(٢س)\, د س$	$-\frac{١}{١٢} ظتا^٦(٢س) - \frac{١}{٨} ظتا^٤(٢س) + ج$
٥١	أردن : ٢٠١٦ شتوي $\int \frac{\sqrt{١+س} - \sqrt{١-س}}{\sqrt{١+س} + \sqrt{١-س}}\, د س$	$-\sqrt{١-س^٢} + لو_هـ \lvert \sqrt{١-س^٢} + ١ \rvert + ج$
٥٢	$\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س}}\, د س ، س > ٠$	$٢(\sqrt[٦]{س})^٣ - ٣(\sqrt[٦]{س})^٢$ $- ٦(\sqrt[٦]{س}) - ٦ لو_هـ \lvert \sqrt[٦]{س} - ١ \rvert + ج$
٥٣	$\int \frac{١ + جاس - جتاس}{١ + جاس + جتاس}\, د س$	$-٢ لو_هـ \lvert جتا(\frac{س}{٢}) \rvert + ج$
٥٤	أردن : ١٩٩٨ $\int \sqrt[٣]{٢س^٥ - س^٣}\, د س$	$\frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٢س^٢ - ١)^٤} + ج$
٥٥	أردن : ١٩٩٩ $\int \frac{(س+١)^٥}{س^٧}\, د س ، س \neq ٠$	$-\frac{١}{٦}(١ + \frac{١}{س})^٦ + ج$
٥٦	أردن : ٢٠٠٠ $\int \frac{\sqrt{س+١} + ١}{\sqrt{س+١} - ١}\, د س$	$(س+١) + ٤\sqrt{س+١}$ $+ ٤ لو_هـ \lvert \sqrt{س+١} - ١ \rvert + ج$
٥٧	أردن : ٢٠٠١ $\int (س^٥ - ٣س)^٣\, د س$	$\frac{١}{١٦}(س^٤ - ٣)^٤ + ج$
٥٨	أردن : ٢٠٠١ شتوي $\int \frac{١}{س^٢} \sqrt{\frac{٢س+١}{س}}\, د س$	$-\frac{٢}{٣} \sqrt{(٢ + \frac{١}{س})^٣} + ج$
٥٩	$\int \frac{د س}{١ + ظاس}\, د س$	$\frac{١}{٤} لو_هـ \lvert قا٢س + ظا٢س \rvert + \frac{١}{٢} س$ $+ \frac{١}{٤} لو_هـ \lvert جتا٢س \rvert + ج$
٦٠	أردن : ٢٠٠٣ شتوي $\int (س^٢ + ١)\, جتا(س^٣ + ٣س + ١)\, د س$	$\frac{١}{٣} جا(س^٣ + ٣س + ١) + ج$
٦١	أردن : ٢٠٠٤ شتوي $\int جا^٣س\, جتا^٣س\, د س$	$\frac{١}{٤} جا^٤س - \frac{١}{٦} جا^٦س + ج$

٦٢	$\int \frac{\sqrt{س^٢ + س^٤}}{س^٥} \, د س$	$- \frac{١}{٣} \left(\frac{١}{س^٢} + ١ \right)^٣ + جـ$
٦٣	أردن : ٢٠٠٧ شتوي $\int هـ^{(س + ٣ هـ^س)} \, د س$	$\frac{١}{٣} هـ^{٣ هـ^س} + جـ$
٦٤	$\int \frac{هـ^س}{هـ^س + هـ^{-س}} \, د س$	$٢ لو_{هـ} \mid هـ^{٢س} + ١ \mid + جـ$
٦٥	أردن : ٢٠١٤ شتوي $\int ظتا س \; لو_{هـ} (جاس) \, د س$	$\frac{١}{٢} \left(لو_{هـ} (جاس) \right)^٢ + جـ$
٦٦	أردن : ٢٠١٦ صيفي $\int \frac{لو_{هـ} ظاس}{جا٢س} \, د س$	$\frac{١}{٤} \left(لو_{هـ} (ظاس) \right)^٢ + جـ$
٦٧	أردن : ٢٠١٩ شتوي $\int \frac{(\sqrt{س} + ٢)^٥}{س^٤} \, د س$	$- \frac{\left(١ + \frac{٢}{\sqrt{س}} \right)^٦}{٦} + جـ$
٦٨	$\int جا^٣س \, (١ + جتاس)^٥ \, دس$	$\frac{(١ + جتاس)^٨}{٨} + \frac{٢ (١ + جتاس)^٧}{٧} + جـ$
٦٩	$\int س^٢ \sqrt[٣]{س^٣ - س^٧} \, د س$	$- \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(١ - س^٤)^٤} + جـ$
٧٠	$\int جا^٣س \, (٤ + جتاس)^٥ \, دس$	$\frac{(٤ + جتاس)^٨}{٨} - \frac{٨ (٤ + جتاس)^٧}{٧}$ $+ \frac{١٥ (٤ + جتاس)^٦}{٦} + جـ$
٧١	أردن : ٢٠١٥ شتوي $\int \frac{(٢ - س)^٣}{س^٢} \, د س$	$\frac{(٢ - س)^٣}{٦} + \frac{(٢ - س)^٢}{٢} + ٢ (٢ - س)$ $+ ٤ لو_{هـ} س + جـ$
٧٢	أردن : ٢٠٢٠ $\int هـ^س \sqrt{هـ^{٢س} + ٢ هـ^س + ١} \, د س$	$\frac{١}{٢} هـ^{٢س} + هـ^س + جـ$
٧٣	$\int هـ^{٣س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٢ هـ^س + ١} \, د س$	$\frac{١}{٤} هـ^{٤س} + \frac{١}{٣} هـ^{٣س} + جـ$

٧٤	أردن : ٢٠٢٠ تكميلي $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١)}\, \text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ١ \mid + \text{جـ}$
٧٥	جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي $\int \frac{\text{جتاس جا}^{٣}\text{س}}{١ + \text{جا}^{٢}\text{س}}\, \text{د س}$	$\frac{١}{٢}(١ + \text{جا}^{٢}\text{س}) - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid ١ + \text{جا}^{٢}\text{س} \mid + \text{جـ}$
٧٦	فلسطين : ٢٠٢٠ $\int \frac{١}{\text{س}^{٥}\sqrt[٥]{\text{س}^{٥} + ١}}\, \text{د س}$	$-\frac{١}{٤}\sqrt[٥]{(١ + \text{س}^{-٥})^{٤}} + \text{جـ}$

ورقة عمل (٤)

طرق التكامل بالأجزاء

رقم	التكامل	الإجابة
١	فلسطين : ٢٠١٤ — $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}(\text{ظاس} - \text{س}) + \text{ج}$
٢		$\int \text{س}^{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٣}\text{س}^{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{١٨}\text{س}^{٦} + \text{ج}$
٣	فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال — $\int ٢\text{س}^{٣}\text{ جا س}^{٢}\ \text{د س}$	$-\text{س}^{٢}\text{ جتا س}^{٢} + \text{جا س}^{٢} + \text{ج}$
٤	أردن : ٢٠١١ صيفي — $\int \text{قا}^{٢}(\sqrt{\text{س}})\ \text{د س}$	$٢\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}(\sqrt{\text{س}}) + ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جتا}(\sqrt{\text{س}}) \mid + \text{ج}$
٥	$\int (\text{س}^{٤}\text{ جاس} - ٤\text{ س}^{٣}\text{ جتاس})\ \text{د س}$	$-\ ٤\ \text{س}^{٤}\text{ جتا س} + \text{ج}$
٦	$\int \text{س}(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٤}\text{جا٢س} + \text{ج}$
٧	فلسطين : ٢٠٠٨ — $\int \text{س}^{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س د س}$	$(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\frac{\text{س}^{١١}}{١١} - (\frac{١}{١٢١})\text{س}^{١١} + \text{ج}$
٨	أردن : ٢٠١٢ شتوي — $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٢}\text{س ظتا}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}(\text{ظتاس} + \text{س}) + \text{ج}$
٩	$\int \text{جتا}\sqrt{\text{س}}\ \text{د س}$	$٢\sqrt{\text{س}}\ \text{جا}\sqrt{\text{س}} + ٢\ \text{جتا}\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$
١٠	$\int \sqrt{\text{س} - ١}\ \text{جا}\sqrt{\text{س} - ١}\ \text{د س}$	$-٢(\text{س} - ١)\text{ جتا}\sqrt{\text{س} - ١}$ $+\ ٤\sqrt{\text{س} - ١}\ \text{جا}\sqrt{\text{س} - ١}$ $+\ ٤\text{جتا}\sqrt{\text{س} - ١} + \text{ج}$
١١	$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\ \text{د س}$	$\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - ٢\text{ س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س} + \text{ج}$
١٢	فلسطين : ٢٠٠٧ — $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{د س}$	$-٢\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}\sqrt{\text{س}} + ٢\text{جا}\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$
١٣	$\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\ \text{د س}$	$\frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$


١٤	$\int \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{د س}$	$٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\ \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} - ٦\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} + ٦\ \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} + \text{جـ}$
١٥	فلسطين : ٢٠١٣ $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س}$	$٢\sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - ٢\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$
١٦	$\int \text{س جتا} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{د س}$	$\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{جا}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} + \text{جتا}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} + \text{جـ}$
١٧	فلسطين : ٢٠٠٧ إكمال $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}} (\text{جاس} - \text{جتاس}) + \text{جـ}$
١٨	$\int \text{س ظا}^{٢}\text{س د س}$	$\text{س} (\text{ظاس} - \text{س}) + \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{جتاس} \rvert + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$
١٩	فلسطين : ٢٠١٥ $\int \text{جا} \sqrt{٤ - ٢\text{س}}\ \text{د س}$	$\sqrt{٤ - ٢\text{س}}\ \text{جتا}\sqrt{٤ - ٢\text{س}} - \text{جا}\sqrt{٤ - ٢\text{س}} + \text{جـ}$
٢٠	$\int \text{جا} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})\ \text{د س}$	$\frac{\text{س جا} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) - \text{س جتا} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})}{٢} + \text{جـ}$
٢١	$\int \frac{٣\text{س} - ٧\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}\ \text{د س}$	$-٧\text{س} - \frac{١٢ - ١١\text{س}}{\text{س} - ١} - ١١\ \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} - ١ \rvert + \text{جـ}$
٢٢	$\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س} + ٢}}\ \text{د س}$	$٢\sqrt{\text{س} + ٢}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س} + ٢}} - ٢\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س} + ٢}} + \text{جـ}$
٢٣	فلسطين : ٢٠١٠ إكمال $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{د س}$	$-\text{س هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$
٢٤	$\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\ \text{هـ}^{\text{س}} + ١}\ \text{د س}$	$\frac{-\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} + \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{هـ}^{\text{س}} + ١ \rvert + \text{جـ}$
٢٥	$\int \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{س}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{١}{٤}\ \text{س}^{٢} + \text{جـ}$
٢٦	أردن : ٢٠١٤ شتوي $\int \text{س جتا} (\sqrt{\text{س}^{٢} + ١})\ \text{د س}$	$\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{جا} (\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}) + \text{جتا} (\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}) + \text{جـ}$
٢٧	$\int \frac{\text{س} + \text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}\ \text{د س}$	$\text{س ظا} \frac{\text{س}}{٢} + \text{جـ}$
٢٨	$\int \text{قا}^{٣}\text{س د س}$	$\frac{١}{٢}\ \text{ظاس قاس} + \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{قاس} + \text{ظاس} \rvert + \text{جـ}$

٢٩	∫ س^{٢}جتا ٢س د س	$\frac{١}{٢}$ س^{٢} جا٢س + $\frac{١}{٢}$ س جتا٢س – $\frac{١}{٤}$ جا٢س + ج
٣٠	أردن : ٢٠٠٤ صيفي ∫ س (لو$_{هـ}$ س)^{٢} د س	$\frac{١}{٢}$ س^{٢} (لو$_{هـ}$ س)^{٢} – $\frac{١}{٢}$ س^{٢}لو$_{هـ}$ س + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ج
٣١	∫ س^{٣} لو$_{هـ}$ ($\frac{١}{س}$) د س	
٣٢	∫ $\frac{٢ \text{ لو}_{هـ} \text{ (ظاس)}}{١ + \text{جتا٢س}}$ د س	ظاس لو$_{هـ}$ (ظاس) – ظاس + ج
٣٣	∫ (س – ١)^{٣} جتا (س^{٢} – ٢س + ٧) د س	$\frac{١}{٢}$ (س^{٢} – ٢س + ١) جا (س^{٢} – ٢س + ٧) + $\frac{١}{٢}$ جتا (س^{٢} – ٢س + ٧) + ج
٣٤	∫ $\frac{\text{س جتاس – جاس}}{س^{٢}}$ د س	$\frac{١}{س}$ جا س + ج
٣٥	∫ هـ$^{-\frac{س}{٢}}$ $\frac{\sqrt{١ - \text{جاس}}}{١ + \text{جتاس}}$ د س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$]	هـ$^{-\frac{س}{٢}}$ قا ($\frac{س}{٢}$) + ج ..
٣٦	∫ $\frac{\text{٢س + ٣ظاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ د س	٢س ظاس + ٢ لو$_{هـ}$ | جتاس | + $\frac{٣}{٢}$ ظا^{٢}س + ج
٣٧	أردن : ٢٠١٠ شتوي ∫ هـ^{س} (٢جتا٣س جتاس – جتا٢س) د س	$\frac{١}{١٧}$ هـ^{س} (٤جا٤س + جتا٤س) + ج
٣٨	أردن : ٢٠٠٠ ∫ س قا^{٢}س د س	س ظاس + لو$_{هـ}$ | جتاس | + ج
٣٩	∫ $\frac{\text{ظا}^{٢}\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ د س	٢ ظا $\sqrt{س}$ – ٢ $\sqrt{س}$ + ج
٤٠	∫ هـ^{س} ($\frac{\text{١ + جاس}}{\text{١ + جتاس}}$) د س	هـ^{س} ظا ($\frac{س}{٢}$) + ج
٤١	أردن : ٢٠٠٨ صيفي ∫ $\frac{س}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ د س	$\frac{١}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ س جا٢س + $\frac{١}{٨}$ جتا٢س + ج

٤٢	$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\right)\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right) - ٢\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{س} + ٢ \rvert + \text{ج}$
٤٣	$\int (\text{س} + ١)\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س هـ}^{\text{س}}\right)\,\text{د س}$	$\text{س هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{س هـ}^{\text{س}} \rvert - \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$ ..
٤٤	$\int \frac{\text{د س}}{\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}}$	$\left(\text{جا}^{٢}\text{س} - ١\right)\text{هـ}^{-\text{جاس}} + ٢\,\text{جاس}\,\text{هـ}^{-\text{جاس}} + ٢\,\text{هـ}^{-\text{جاس}} + \text{ج}$
٤٥	$\int \left(\text{س جتاس لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جاس لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جاس}\right)\text{د س}$	$\text{س جاس لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{ج}$ ..
٤٦	$\int \text{جتا٢س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس})\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}\,\text{جا٢س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس}) + \frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س}\right) + \text{ج}$
٤٧	$\int \frac{(٢ - \text{س})\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(١ - \text{س})^{٢}}\,\text{د س}$	$\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ - \text{س}} + \text{ج}$ ..
٤٨	أردن : ٢٠٠١ $\int \text{س}^{٥}\,\text{جتاس}^{٣}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\text{جاس}^{٣} + \frac{١}{٣}\,\text{جتاس}^{٣} + \text{ج}$
٤٩	أردن : ٢٠٠٣ شتوي $\int \text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{٩}\text{س}^{٣} + \text{ج}$
٥٠	أردن : ٢٠٠٥ شتوي $\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{(\text{س}^{٢} + ١)}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{(\text{س}^{٢} + ١)}\left(\text{س}^{٢} - ١\right) + \text{ج}$
٥١	$\int \text{جا٢س}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}}\,\text{د س}$	$-٢\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}} + ٢\,\text{هـ}^{\text{جتاس}} + \text{ج}$
٥٢	$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{\text{س}}\right)}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$	$٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{\text{س}}\right) - ٢\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$
٥٣	أردن : ٢٠١١ شتوي $\int (٢\text{س} - ١)\,\text{جا}(٢\text{س})\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}(١ - ٢\text{س})\,\text{جتا٢س} + \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س} + \text{ج}$
٥٤	أردن : ٢٠١٢ صيفي $\int \frac{\text{س}}{\text{جتا٢س} + ١}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}\,\text{س ظاس} + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{جتاس} \rvert + \text{ج}$

٥٥	أردن : ٢٠١٣ شتوي $\int \text{س}^{٥}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٣}\left(\text{س}^{٣}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\right) + \text{ج}$
٥٦	$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)^{٢}}\ \text{د س}$	$-\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + ٢)}{\text{س} + ٢} - \frac{١}{\text{س} + ٢} + \text{ج}$ ..
٥٧	بيت لحم: ٢٠١٩ تجريبي $\int \text{س}\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\ \text{هـ}^{\text{س}} + ١}\ \text{د س}$	$\text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ج}$
٥٨	أردن : ٢٠١٧ شتوي $\int \text{جا}^{٣}\text{س لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{جتاس})\ \text{دس}$	$\left(\frac{(١ + \text{جتاس})^{٣}}{٣} - (١ + \text{جتاس})^{٢}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{جتاس})$ $-\frac{(١ + \text{جتاس})^{٣}}{٩} + \frac{(١ + \text{جتاس})^{٢}}{٢} + \text{ج}$
٥٩	أردن : ٢٠١٨ شتوي $\int (\text{س} + ٢)^{٣}\ \text{جا}(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣)\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٢}(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤)\ \text{جتا}(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣)$ $+\frac{١}{٢}\text{جا}(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣) + \text{ج}$
٦٠	أردن : ٢٠١٨ صيفي $\int \text{جا}٢\text{س لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس})^{٢}\ \text{دس}$	$٢\ \text{جتا}^{٢}\text{س لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس}) + \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{ج}$
٦١	أردن : ٢٠١٩ شتوي $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}} + ٢}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{د س}$	$٣\text{هـ}^{٢}\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} - \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right) + \text{ج}$
٦٢	$\int ٤\ \text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جاس جتاس د س}$	$-\frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جتا}\ ٢\text{س} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جا}\ ٢\text{س} + \text{ج}$
٦٣	أردن : ٢٠١٩ صيفي $\int \text{س}^{٥}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣} + ١}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^{٣} + ١}(\text{س}^{٣} - ١) + \text{ج}$
٦٤	$\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}})\ \text{د س}$	$-\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{ج}$
٦٥	أردن : ٢٠٠٩ شتوي $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{قتاس}}\ \text{د س}$	$\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}(\text{جاس} - \text{جتاس}) + \text{ج}$

٦٦	$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{٤ - \text{ظا}^2\text{س}}\ \text{د س}$	$-\frac{١}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \mid ٢ - \text{ظاس} \mid + \frac{١}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \mid ٢ + \text{ظاس} \mid + \text{جـ}$
٦٧	$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا}\left(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)\ \text{د س}$	$-٢\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{جتا}\left(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\right) + ٢\ \text{جا}\left(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\right) + \text{جـ}$
٦٨	فلسطين : ٢٠٢٠ $\int \frac{١}{\text{قتاس}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\left(١ + \text{جاس}\right)\ \text{د س}$	$-\text{جتا س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \mid ١ + \text{جاس} \mid + \text{س} + \text{جتاس} + \text{جـ}$
٦٩	$\int \frac{\text{س}^2\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) + \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}^2}\ \text{د س}$	$\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} \mid - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} + \text{جـ}$ ..
٧٠	$\int \frac{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})\right)^2}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) + ٢\right)^2}\ \text{د س}$	$\frac{-\text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})\right)^2}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) + ٢} + \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - \text{س} + \text{جـ}$

ورقة عمل (٥)

طرق التكامل بالكسور الجزئية

رقم	التكامل	الإجابة
١	$\int \frac{\text{٢}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}\,\text{د س}$	$-\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{١} - \text{س} \rvert + \text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{١} + \text{س} \rvert + \text{جـ}$
٢	طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي $\int \frac{\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{٢} - \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{د س}$	$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left\lvert \frac{\text{ظتاس} - \text{١}}{\text{ظتاس} + \text{١}} \right\rvert + \text{جـ}$
٣	$\int \frac{\text{٢جاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{٢}}\,\text{د س}$	$-\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{جتاس} - \text{٢} \rvert + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{جتاس} + \text{١} \rvert + \text{جـ}$
٤	$\int \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}}\,\text{د س}$	$-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{س} \rvert + \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{س} - \text{٢} \rvert + \text{جـ}$
٥	أردن : ٢٠٠٨ شتوي $\int \frac{\text{٢ لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س} - \text{٢})^{\text{٢}}}\,\text{د س}$	$\frac{-\text{٢ لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س} - \text{١}} - \text{٢ لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{س} \rvert + \text{٢ لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{س} - \text{١} \rvert + \text{جـ}$
٦	جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}} - \text{٤س}}\,\text{د س}$	$\frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - \text{٢} \rvert$ $-\frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \text{٢} \rvert + \text{جـ}$
٧	فلسطين : ٢٠١٥ إكمال $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤}}\,\text{د س}$	$\frac{\text{١}}{\text{٥}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{هـ}^{\text{س}} - \text{٤} \rvert - \frac{\text{١}}{\text{٥}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{هـ}^{\text{س}} + \text{١} \rvert + \text{جـ}$
٨	فلسطين : ٢٠١٩ $\int \frac{\text{٤جاس}}{\text{٣} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{جتاس} - \text{٢} \rvert - \text{٢ لو}_{\text{هـ}}\lvert \text{جتاس} + \text{٢} \rvert + \text{جـ}$
٩	$\int \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} - \text{١}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}} - \text{٤}}\,\text{د س}$	$\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}} - \text{٣}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} + \text{٣ لو}_{\text{هـ}}\lvert \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} - \text{٢} \rvert$ $+ \text{٩ لو}_{\text{هـ}}\lvert \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} + \text{٢} \rvert + \text{جـ}$

١٠	$\int \frac{\text{٦جتاس}}{(\text{٢جاس} - ١)(\text{جاس} + ١)}\,\text{د س}$	$٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{٢جاس} - ١ \mid - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جاس} + ١ \mid + \text{جـ}$
١١	$\int \frac{\text{٧س}}{\text{٢س}^٢ - \text{٥س} - ٣}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{٢س} + ١ \mid + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ٣ \mid + \text{جـ}$
١٢	فلسطين : ٢٠١٠ $\int \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - ٤}\,\text{د س}$	$\frac{٣}{٤}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ٢ \mid + \frac{١}{٤}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ٢ \mid + \text{جـ}$
١٣	$\int \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{٣س} + ٢}\,\text{د س}$	$-\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ٢ \mid + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ١ \mid + \text{جـ}$
١٤	$\int \frac{\text{قا}^٤\,\text{س}}{\text{ظا}^٢\,\text{س} - \text{ظاس} - ٢}\,\text{د س}$	$\text{ظاس} + \frac{٥}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{ظاس} - ٢ \mid$ $- \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{ظاس} + ١ \mid + \text{جـ}$
١٥	فلسطين : ٢٠١٦ $\int \frac{\text{س}^٢ + \text{٢س} + ٥}{\text{س}^٢ + \text{٢س} - ٣}\,\text{د س}$	$\text{س} - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ٣ \mid + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ١ \mid + \text{جـ}$
١٦	فلسطين : ٢٠٠٧ دراسات $\int \frac{\text{٢ س} + ٤}{\text{س}^٢ - \text{٢س}}\,\text{د س}$	$-٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} \mid + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ٢ \mid + \text{جـ}$
١٧	$\int \frac{\text{٣س} + ٨}{\text{س}^٢ - \text{٣س} - ٤}\,\text{د س}$	$٤\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ٤ \mid - \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ١ \mid + \text{جـ}$
١٨	$\int \frac{٥}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٦}\,\text{د س}$	$٦\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt{\text{س}} - ٣ \mid + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt{\text{س}} + ٢ \mid + \text{جـ}$
١٩	$\int \frac{١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ٢ \mid - \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ١ \mid + \text{جـ}$
٢٠	فلسطين : ٢٠١٤ $\int \frac{١}{\text{س}\sqrt{\text{س} + ١}}\,\text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt{\text{س} + ١} - ١ \mid - \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt{\text{س} + ١} + ١ \mid + \text{جـ}$
٢١	$\int \frac{١}{\text{س}(\text{س}^{\text{ن}} + ١)}\,\text{د س}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}^*$	$\frac{١}{\text{ن}}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س}^{\text{ن}} \mid - \frac{١}{\text{ن}}\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س}^{\text{ن}} + ١ \mid + \text{جـ}$ ..

٢٢	فلسطين : ٢٠٠٩ $\int \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٣}\sqrt{\text{س}} + \text{٢}}\, \text{د س}$	$\text{٤ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \sqrt{\text{س}} + \text{٢} \right\vert - \text{٢ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \sqrt{\text{س}} + \text{١} \right\vert + \text{ج}$
٢٣	نابلس : ٢٠١٩ تجريبي $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{٤} - \text{هـ}^{\text{٢س}}}\, \text{د س}$	$-\frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{٢} - \text{هـ}^{\text{س}} \right\vert + \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} \right\vert + \text{ج}$
٢٤	$\int \sqrt{\text{١} - \text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{د س}$	$\text{٢}\sqrt{\text{١} - \text{هـ}^{\text{س}}} - \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \sqrt{\text{١} - \text{هـ}^{\text{س}}} + \text{١} \right\vert$ $+ \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \sqrt{\text{١} - \text{هـ}^{\text{س}}} - \text{١} \right\vert + \text{ج}$
٢٥	$\int \frac{\text{١}}{\text{٢س} - \text{١} + \sqrt{\text{٢س} + \text{١}}}\, \text{د س}$	$\frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \sqrt{\text{٢س} + \text{١}} + \text{٢} \right\vert$ $+ \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \sqrt{\text{٢س} + \text{١}} - \text{١} \right\vert + \text{ج}$
٢٦	فلسطين : ٢٠١٧ $\int \frac{\text{١٢}}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{٣})(\text{١} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})}\, \text{د س}$	$\text{٦ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{٣} \right\vert - \text{٦ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{١} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \right\vert + \text{ج}$
٢٧	فلسطين : ٢٠٠٨ $\int \frac{\text{جاس جتاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣جتاس} + \text{٢}}\, \text{د س}$	$-\text{٢ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{جتاس} - \text{٢} \right\vert + \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{جتاس} - \text{١} \right\vert + \text{ج}$
٢٨	أردن : ٢٠٠٩ صيفي $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{١} + \text{٣جاس} - \text{جتا٢س}}\, \text{د س}$	$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{جاس} \right\vert - \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{٣} + \text{٢جاس} \right\vert + \text{ج}$
٢٩	أردن : ٢٠١٠ صيفي $\int \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{\text{٢}} - \text{١})\, \text{دس}$	$\text{س لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}) - \text{٢س} - \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{س} - \text{١} \right\vert$ $+ \text{لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{س} + \text{١} \right\vert + \text{ج}$
٣٠	أردن : ١٩٩٧ $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س}}\, \text{د س}$	$\text{س} + \text{٥ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{س} \right\vert - \text{٥ لو}_{\text{هـ}} \left\vert \text{س} + \text{١} \right\vert + \text{ج}$

الرقم	السؤال	الإجابة
٣١	أردن : ١٩٩٩ ✎ $\int \frac{\text{٢س}^{٢}}{\text{١} - \text{س}^{٢}}\ \text{د س}$ ، $\text{س} \neq \pm \text{١}$	$-\text{٢س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{١} - \text{س} \rvert + \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{١} + \text{س} \rvert + \text{جـ}$
٣٢	أردن : ٢٠٠٠ إكمال ✎ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \text{٩}}\ \text{د س}$	$\text{٢}\sqrt{\text{س}} + \text{٣ لو}_{\text{هـ}} \lvert \sqrt{\text{س}} - \text{٣} \rvert$ $- \text{٣ لو}_{\text{هـ}} \lvert \sqrt{\text{س}} + \text{٣} \rvert + \text{جـ}$
٣٣	أردن : ٢٠٠١ ✎ $\int \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{١}}\ \text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{هـ}^{\text{س}} - \text{١} \rvert - \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{هـ}^{\text{س}} \rvert + \text{جـ}$
٣٤	أردن : ٢٠٠٢ ✎ $\int \frac{\text{٢س} + \text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{٣س} - \text{٤}}\ \text{د س}$	$\frac{\text{٣}}{\text{٥}} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} - \text{١} \rvert + \frac{\text{٧}}{\text{٥}} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} + \text{٤} \rvert + \text{جـ}$
٣٥	أردن : ٢٠٠٤ شتوي ✎ $\int \frac{\text{٣س} - \text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - \text{٢}}\ \text{د س}$	$\frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} - \text{١} \rvert + \frac{\text{٧}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} + \text{٢} \rvert + \text{جـ}$
٣٦	أردن : ٢٠٠٦ شتوي ✎ $\int \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٢س} \sqrt[3]{\text{س}}}\ \text{د س}$	$\text{٣ لو}_{\text{هـ}} \lvert \sqrt[3]{\text{س}} \rvert - \text{٣ لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{١} + \text{٢}\sqrt[3]{\text{س}} \rvert + \text{جـ}$
٣٧	أردن : ٢٠١١ صيفي ✎ $\int \frac{\text{٤ د س}}{\text{س}^{٣} + \text{س}}$ ، $\text{س} > \text{٠}$	$\text{٢ لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س}^{٢} \rvert - \text{٢ لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س}^{٢} + \text{١} \rvert + \text{جـ}$
٣٨	أردن : ٢٠١٢ شتوي ✎ $\int \frac{\text{س}^{٣} - \text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{٢س}}\ \text{د س}$	$\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س}^{٢} - \text{٢س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} \rvert$ $+ \frac{\text{٩}}{\text{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} + \text{٢} \rvert + \text{جـ}$
٣٩	أردن : ٢٠١٣ شتوي ✎ $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - \text{٤}}\ \text{د س}$	$\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} - \text{٢} \rvert - \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} + \text{٢} \rvert + \text{جـ}$

٤٠	أردن : ٢٠١٣ صيفي $\int \frac{\text{س}^{٥} + ٢}{\text{س}^{٢} - ١}\,\text{د س}$	$\frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ١ \mid$ $- \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ١ \mid + \text{جـ}$
٤١	$\int \frac{١}{١ + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{د س}$	$\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} \mid ١ + \text{هـ}^{\text{س}} \mid + \text{جـ}$
٤٢	أردن : ٢٠١٥ شتوي $\int \frac{٢ - \sqrt[٣]{\text{س}}}{٩ - \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\,\text{د س}$	$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٦\sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{٩}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt[٣]{\text{س}} - ٣ \mid$ $+ \frac{٤٥}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt[٣]{\text{س}} + ٣ \mid + \text{جـ}$
٤٣	أردن : ٢٠١٥ صيفي $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٢\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٥\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{هـ}^{\text{س}} - ٢ \mid - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid ٢\text{هـ}^{\text{س}} - ١ \mid$ $+ \text{جـ}$
٤٤	أردن : ٢٠١٦ صيفي $\int \frac{١}{\text{س} - \sqrt{\text{س} + ٢}}\,\text{د س}$	$\frac{٤}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt{\text{س} + ٢} - ٢ \mid$ $+ \frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \sqrt{\text{س} + ٢} + ١ \mid + \text{جـ}$
٤٥	أردن : ٢٠١٧ شتوي $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{٨ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid ٣ - \text{قاس} \mid + \frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid ٣ + \text{قاس} \mid$ $+ \text{جـ}$
٤٦	$\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا٢س} + ٢\text{جتاس} + ١}\,\text{د س}$	$- \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جتاس} \mid + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جتاس} + ١ \mid + \text{جـ}$
٤٧	أردن : ٢٠١٨ صيفي $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٩}\,\text{د س}$	$\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} - ٣ \mid + ٧\,\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{س} + ٣ \mid + \text{جـ}$
٤٨	أردن : ٢٠١٩ شتوي $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٣\text{جاس} - ٣}\,\text{د س}$	$-\text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جاس} - ٢ \mid + \text{لو}_{\text{هـ}} \mid \text{جاس} - ١ \mid + \text{جـ}$

٤٩	$\int \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{٤س}^{٢} - ٩)\ \text{دس}$	$\text{س لو}_{\text{هـ}} (\text{٤س}^{٢} - ٩) - \text{٢س} - \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{٢س} - ٣ \rvert + \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{٢س} + ٣ \rvert + \text{جـ}$
٥٠	أردن : ٢٠١٧ صيفي $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦} + \text{س}^{٣}}\ \text{دس}$ ، $\text{س} > ٠$	$\frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س}^{٣} \rvert - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س}^{٣} + ١ \rvert + \text{جـ}$
٥١	فلسطين : ٢٠٢٠ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{هـ}^{\text{س}} - ٢}\ \text{دس}$	$\frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{هـ}^{\text{س}} - ١ \rvert - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{هـ}^{\text{س}} + ٢ \rvert + \text{جـ}$

الوحدة الخامسة

التكامل المحدود وتطبيقاته

٥ – ١ التجزئة ومجموع ريمان

ملخص الــدرس

أولاً : التجزئة النونية الغير منتظمة

تعريف

إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة وكانت $\sigma_{ن} = \{ أ = س_{٠} ، س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، \dots ، س_{ن} = ب \}$ حيث :

$س_{٠} < س_{١} < س_{٢} < س_{٣} < \dots < س_{ن}$ فإننا نسمي $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب] وتسمى الفترة [$س_{ر-١}$ ، $س_{ر}$] الفترة الجزئية الرائية وطولها $\Delta س_{ر} = س_{ر} - س_{ر-١}$ ويكون طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

وبالرموز $\sum_{ر=١}^{ن} (س_{ر} - س_{ر-١}) = ب - أ$

ملاحظة

لكتابة أي تجزئة $\sigma_{ن}$ لفترة ما يجب أن تتوفر الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١. الفترة مغلقة .
٢. تبدأ التجزئة من بداية الفترة وتنتهي بنهايتها .
٣. عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً .

ثانياً : التجزئة النونية المنتظمة

تعريف

تسمى التجزئة النونية $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب] إذا كان أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية ويكون

$$\text{طول الفترة الجزئية} = \frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}} = \frac{ب - أ}{ن}$$

ثالثاً : مجموع ريمان

تعريف

إذا كان ق (س) إقتراناً معرفاً في الفترة [أ ، ب] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

فإن المقدار $\sum_{ر=1}^{ن}$ ق (س$^*_{ر}$) (س$_{ر}$ – س$_{ر-1}$) حيث س$^*_{ر}$ ∋ [س$_{ر-1}$ ، س$_{ر}$] يسمى مجموع ريمان ويرمز له بالرمز

م ($\sigma_{ن}$ ، ق) وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن م ($\sigma_{ن}$ ، ق) = $\frac{\text{ب – أ}}{\text{ن}}$ $\sum_{ر=1}^{ن}$ ق (س$^*_{ر}$)

ملاحظات مهمة

- عدد عناصر التجزئة المنتظمة = ن + ١
- عدد الفترات الجزئية = ن
- طول الفترة الكلية = ب – أ
- مجموع اطوال الفترات الجزئية = $\sum_{ر=1}^{ن}$ [س$_{ر}$ ، س$_{ر-1}$] = وهو يساوي طول الفترة الكلية ب – أ
- طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{ب – أ}}{\text{ن}}$ نرمز لها بالرمز ل أحياناً في الحل

ملاحظة

١) م ($\sigma_{ن}$ ، أ) على [م ، ن] = أ (ن – م)

٢) م ($\sigma_{ن}$ ، أ ق) = أ × م ($\sigma_{ن}$ ، ق)

٣) م ($\sigma_{ن}$ ، أ ق + ب) = أ × م ($\sigma_{ن}$ ، ق) + م ($\sigma_{ن}$ ، ب) حيث أ ، ب ثوابت .

مثال إذا كان ق (س) = ٢ + هـ$^{\text{س}}$ وكانت $\sigma_{٣}$ تجزئة ثلاثية منتظمة للفترة [–١ ، ٢] جد م ($\sigma_{٣}$ ، ق)

١) معتبراً س$^*_{ر}$ = س$_{ر}$

٢) معتبراً س$^*_{ر}$ = س$_{ر-1}$


الحـــــل

١) عندما $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ (نهاية فترة لذلك نهمل العدد −١)

$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٢ + ١}{٣} = ١ \Leftarrow \sigma_{٣} = \{-١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$

$\text{م}(\sigma_{٣} ، \text{ق}) = \text{ل} \times (\text{ق}(٠) + \text{ق}(١) + \text{ق}(٢))$ (لاحظ هنا نهمل العدد −١ لأن $\text{س}_{\text{ر}}$ نهاية فترة)

$= ١ \times ((٣) + (٢ + \text{هـ}) + (٢ + \text{هـ}^٢)) = ٧ + \text{هـ} + \text{هـ}^٢$

١) عندما $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}-١}$

$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٢ + ١}{٣} = ١ \Leftarrow \sigma_{٣} = \{-١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$

$\text{م}(\sigma_{٣} ، \text{ق}) = \text{ل} \times (\text{ق}(-١) + \text{ق}(٠) + \text{ق}(١))$ (لاحظ هنا نهمل العدد ٢ لأن $\text{س}_{\text{ر}-١}$ بداية فترة)

$= ١ \times ((٢ + \frac{١}{\text{هـ}}) + (٣) + (٢ + \text{هـ})) = \frac{\text{هـ}^٢ + ٧\text{هـ} + ١}{\text{هـ}}$

مثال

إذا كان ق ، هـ إقترانين معرفين على الفترة [٢ ، ١٠] وكان هـ (س) = ٣ ق (س) + س بحيث $\text{م}(\sigma_{٤} ، \text{ق}) = ٦$ ، جد $\text{م}(\sigma_{٤} ، \text{هـ})$ معتبراً $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ علماً بأن $\sigma_{٤}$ تجزئة منتظمة للفترة نفسها .

الحـــــل

$\text{ل} = ٢ \Leftarrow \sigma_{٤} = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠\}$

$\text{هـ}(\text{س}_{\text{ر}}) = ٣\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) + \text{س}_{\text{ر}} \Leftarrow \text{م}(\sigma_{٤} ، \text{هـ}) = ٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{هـ}(\text{س}_{\text{ر}})$

$= ٢ \left(\sum_{\text{ر}=١}^{٤} ٣\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) + \text{س}_{\text{ر}} \right) = ٢ \left(٣ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) + \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{س}_{\text{ر}} \right)$

$= ٣ \times \left(٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) \right) + ٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{س}_{\text{ر}}$ لاحظ أن : $٢ \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{م}(\sigma_{٤} ، \text{ق}) = ٦$

$= ٣ \times ٦ + ٢(\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣ + \text{س}_٤) = ١٨ + ٢(٤ + ٦ + ٨ + ١٠) = ١٨ + ٢(٢٨) = ٧٤$


ورقة عمل (١) — التجزئة ومجموع ريمان

إختر الإجابة الصحيحة

١) فلسطين : ٢٠١٠ إكمال

إذا كانت σ_{8} تجزئة منتظمة للفترة [−١ ، ٣] فإن الفترة الجزئية الأخيرة هي :

(أ) [٢ ، ٣]	(ب) [٢,٧٥ ، ٣]	(ج) [٢,٥ ، ٣]	(د) [$\frac{٢٣}{٩}$ ، ٣]

٢) فلسطين : ٢٠١١

إذا كان العنصر السادس في تجزئة منتظمة للفترة [−٢ ، ٤] يساوي ١ فما عدد عناصر هذه التجزئة

(أ) ١٠	(ب) ١١	(ج) ١٢	(د) ١٣

٣) إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [ء ، ب] وكان طول الفترة الجزئية الواحدة = $\frac{١}{٢}$ والعنصر الثامن فيها = − $\frac{١}{٢}$

فإن قيمة الثابت ء = :

(أ) ٤	(ب) −٤	(ج) ٣	(د) −٣

٤) إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [ء ، ٤ ء] وكان العنصر الثالث فيها = ٨ والعنصر السادس = ١٤ فإن قيمة ء = :

(أ) −١	(ب) ٣	(ج) ٢	(د) ٤

٥) بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان ق (س) = $\frac{١٢}{س}$ ، س ∈ [٢ ، ٦] وكان $\sigma_{٣}$ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } ، $س^*_{ر}$ = $س_{ر-١}$ فإن م ($\sigma_{٣}$ ، ق) =

(أ) ٩	(ب) ١١	(ج) ١٣	(د) ١٦

٦) إذا كانت $\sigma_{ن}$ = { −٦ ، −٣ ، ٠ ، .... ، ٤٨ } تجزئة منتظمة للفترة [−٦ ، ٤٨] فإن عدد عناصر $\sigma_{ن}$

(أ) ١٨	(ب) ١٩	(ج) ١٧	(د) ٢٠

٧) إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ٢٠] وكان العنصر الرابع فيها يساوي ٦ فإن عدد عناصر $\sigma_{ن}$ يساوي :

(أ) ٢٠	(ب) ١١	(ج) ١٠	(د) ٩

٨) في التجزئة المنتظمة $\sigma_{٢٠}$ للفترة [−١ ، ٩] الفترة الجزئية السابعة هي :

(أ) [٢,٥ ، ٣]	(ب) [٣ ، ٤]	(ج) [٢ ، ٢,٥]	(د) [٢ ، ٣]

٩) فلسطين : ٢٠١٢

إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [٣ ، ب] وكان العنصر التاسع فيها يساوي ٥ فإن قيمة الثابت ب تساوي :

(أ) ١٢	(ب) ١٠	(ج) ٨	(د) ٦

١٠ فلسطين : ٢٠٠٩ إكمال

إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [−١٢ ، ٢٠] وكان $س_٥$ فيها يساوي −٢ فإن عدد عناصر $\sigma_{ن}$ يساوي :

أ	ب	ج	د
١٧	١٥	١٦	٢٠

١١ إذا كان $ق(س) = س^٢$ ، س ∈ [١ ، ٣] وكانت $\sigma_٢$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة ، $س_ر^* = س_ر$

فإن : $م(\sigma_٢ ، ق) =$

أ	ب	ج	د
٥	$\frac{٢٦}{٣}$	١٣	١٤

١٢ رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت $\sigma_{ن} = \{ ٣ ، ٣ + \frac{٢}{ن} ، ٣ + \frac{٤}{ن} ، .... ، ١٥ \}$ تجزئة منتظمة للفترة [٣ ، ١٥] فإن عدد عناصر التجزئة هو :

أ	ب	ج	د
ن + ١	١٢ن + ١	١٢ن	٦ن + ١

١٣ إذا كان العنصر العاشر في التجزئة المنتظمة $\sigma_{١٥}$ للفترة [أ ، ١ + ٣أ] = ١٦ فإن قيمة أ هي :

أ	ب	ج	د
٦	٧	٨	١١

١٤ جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان $ق(س) = ٤س$ ، س ∈ [−١ ، ٤] وكان $\sigma_٣ = \{ −١ ، ٠ ، ١ ، ٤ \}$ تجزئة لهذه الفترة بحيث

$س_١^* = −١$ ، $س_٢^* = \frac{١}{٤}$ ، $س_٣^* = ٢$ فما قيمة $م(\sigma_٣ ، ق)$

أ	ب	ج	د
٥	١٩	٢٠	٢١

١٥ إذا كان $ق(س) = س^٢ − ٣$ معرفاً على الفترة [١ ، ٧] وكان $\sigma_٣$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة فإذا كان $س_ر^* = س_ر$

فإن : $م(\sigma_٣ ، ق) =$

أ	ب	ج	د
١٤٨	٧٤	١٤٤	٧٢

١٦ إذا كان العنصر السابع في التجزئة المنتظمة $\sigma_{١٤}$ في الفترة [أ ، ١ − ٢أ] يساوي ١ فإن قيمة أ :

أ	ب	ج	د
−٢	٢	−١	صفر

١٧ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، ٠ \leqslant س < ٤ \\ س + ١ & ، ٤ \leqslant س \leqslant ٦ \end{cases}$ وكانت $\sigma_٣$ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ٦] فإن

$م(\sigma_٣ ، ق)$ علماً بأن $س_ر^* = س_{ر−١}$

أ	ب	ج	د
٢٢	٤٦	٢٨	١٨

١٨ جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت σ_{10} = { أ ، ١ ، .... ، ١٧ ، ب } تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] فإن قيمة أ

أ) ٠	ب) −١	ج) −٢	د) −٣

١٩ فلسطين : ٢٠١٤

إذا كانت σ_{5} تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] وكان $\sum_{ر=1}^{5} (س_{ر} - س_{ر-1})$ يساوي ١٠ فإن طول الفترة الجزئية [$س_{4}$ ، ب] = :

أ) ١٠	ب) ٢,٥	ج) ٢	د) ١

٢٠ إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة سداسية منتظمة للفترة [٣ ، ٦] وكان م ($\sigma_{ن}$ ، ق) = ١٠ فإن م ($\sigma_{ن}$ ، ٢ق + ٤) = :

أ) ٢٤	ب) ٢٨	ج) ٢٠	د) ٣٢

٢١ فلسطين : ٢٠١٦ إكمال

إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [−١ ، ٥] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٣}$ فإن عدد عناصرها :

أ) ٢٠	ب) ١٩	ج) ١٨	د) ٦

٢٢ طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

أي من المجموعات التالية يعتبر تجزئة للفترة [−١ ، ٣] ؟

أ) { −١ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ }	ب) { ٠ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، ٣ }
ج) { −١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }	د) { −١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ }

٢٣ فلسطين : ٢٠١٢ إكمال

إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ٧] وكان العنصر الثاني فيها يساوي ١,٣ فإن قيمة ن :

أ) ١٩	ب) ٢٠	ج) ٢١	د) ٢٢

٢٤ إذا كانت $\sigma_{ن}$ = { أ ، −٢ ، .... ، ٨ } تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ٨] فإن قيمة أ

أ) −٦	ب) −٥	ج) −٣	د) −٤

٢٥ إذا كانت $\sigma_{ن}$ = { ١ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٧}{٣}$ ، .... ، ١٥ } تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ١٥] فإن عدد عناصر $\sigma_{ن}$

أ) ٢١	ب) ٢٠	ج) ٢٢	د) ١٥

٢٦ فلسطين : ٢٠١٣

إذا كانت $\sigma_{ن}$ = { ١ ، ...... ، ١٧ ، ١٩، .... ، ٩٩ } تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ٩٩] فإن عدد الفترات الجزئية الناتجة عن التجزئة $\sigma_{ن}$

أ) ٤٨	ب) ٤٩	ج) ٥٠	د) ٥١

٢٧ فلسطين : ٢٠١٥

إذا كانت $\sigma_{٢٤}$ تجزئة منتظمة للفترة [٢ ، ب] وكان $\sum_{ر=١}^{٢٤} (س_ر - س_{ر-١})$ يساوي ١٢ فإن قيمة الثابت ب :

أ) ١٢	ب) ١٤	ج) ٢٤	د) ٢٦

٢٨ إذا كانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [-١ ، ٩] وكان العنصر الخامس هو ٧ فإن عدد عناصر هذه التجزئة هو :

أ) ٦	ب) ١٢	ج) ٩	د) ٧

٢٩ فلسطين : ٢٠٢٠

لتكن $\sigma_{٥٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ٣١] فما قيمة $\sum_{ر=١}^{٥٠} (س_ر - س_{ر-١})$ ؟

أ) ٣٠	ب) ٥٠	ج) ٣٢	د) $\frac{٣}{٥}$

٣٠ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كانت $\sigma_٣$ = { -٣ ، -١ ، ٠ ، ١ } تجزئة للفترة [-٣ ، ١] وكان

ق (س) = ٢س حيث $س_ر^* = س_{ر-١}$ فما قيمة م ($\sigma_٣$ ، ق) ؟

أ) -١٤	ب) -١٦	ج) -٧	د) ٨

إجابات الإختيار من متعدد (التجزئة ومجموع ريمان)

١	ج	[٢,٥ ، ٣]	٢	ب	١١	٣	ب	-٤
٤	د	٤	٥	د	١٦	٦	ب	١٩
٧	ب	١١	٨	ج	[٢ ، ٢,٥]	٩	د	٦
١٠	أ	١٧	١١	ج	١٣	١٢	د	٦ن + ١
١٣	ب	٧	١٤	د	٢١	١٥	أ	١٤٨
١٦	أ	-٢	١٧	أ	٢٢	١٨	ب	-١
١٩	ج	٢	٢٠	د	٣٢	٢١	ب	١٩
٢٢	أ	{ -١ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ }	٢٣	ب	٢٠	٢٤	د	-٤
٢٥	ج	٢٢	٢٦	ب	٤٩	٢٧	ب	١٤
٢٨	أ	٦	٢٩	أ	٣٠	٣٠	أ	-١٤

ورقة عمل (٢) التجزئة ومجموع ريمان

١	أكتب التجزئة الخماسية للفترة [-١ ، ٩]	$\sigma_{٥}$ = { -١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }
٢	إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [٢ ، ٧] جد الفترة الجزئية الثانية	[٢ + $\frac{٥}{ن}$ ، ٢ + $\frac{١٠}{ن}$]
٣	فلسطين : ٢٠١١ إكمال إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [٢ ، أ] وكان العنصر السابع فيها يساوي ٨ فما قيمة أ ؟	أ = ١٤
٤	قباطية : ٢٠٠٨ تجريبي إذا كان ق (س) = ٤س + ٢ معرفاً على الفترة [-١ ، أ] وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة وكان م ($\sigma_{٤}$ ، ق) = ٣٢ فأوجد قيمة أ علماً بأن $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$	أ = ٣
٥	إذا كان ق (س) = ٦س معرفاً على الفترة [١ ، ب] وكانت $\sigma_{٣}$ تجزئة منتظمة لهذه الفترة بحيث م ($\sigma_{٣}$ ، ق) = ٢٨ فأوجد قيمة ب علماً بأن $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$	ب = ٣
٦	إذا كان ق (س) = $\frac{س}{ك}$ + ١ وكانت $\sigma_{٤}$ = { ٠ ، ك ، ٣ك ، ٧ك ، ١٠ك } حيث ك ثابت > صفر ، تجزئة للفترة جد قيمة ك حيث م ($\sigma_{٤}$ ، ق) = ٩٠ متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر-١}$	٢
٧	خارجي إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{١}{٤}\text{س} + ٣ & ، ٠ \leqslant \text{س} < ٣٢ \\ ٥ & ، ٣٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٦٤ \end{cases}$ جد م ($\sigma_{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ق) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $\frac{س_{ر-١} + س_{ر}}{٢}$	١٢٨
٨	إذا كانت $\sigma_{١٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] وكان $س_{٨}$ فيها يساوي ١٩ والعنصر السادس فيها يساوي ١٣ فما قيمة الثابتين أ ، ب ؟	أ = ٣ ب = ٢٣

٩	إذا كان ق (س) = ٦ − $س^{٢}$ وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئة رباعية منتظمة للفترة [١ ، ٥] جد م ($\sigma_{٤}$ ، ٢ ق + ٢٠) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$	٢٠
١٠	خـارجي ✍ إذا كان ق (س) = $س^{٢}$ + ١ وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئة رباعية منتظمة للفترة [٠ ، ٤] جد م ($\sigma_{٤}$ ، ق) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $\frac{س_{ر-١} + س_{ر}}{٢}$	١٣
١١	إذا كان ق (س) = $\begin{cases} جاس ، & ٠ \leqslant س < \frac{\pi}{٢} \\ جتاس ، & \frac{\pi}{٢} \leqslant س \leqslant \pi \end{cases}$ وكانت $\sigma_{٣}$ تجزئة ثلاثية منتظمة للفترة [٠ ، π] جد م ($\sigma_{٣}$ ، ق) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر-١}$	$\frac{\pi}{٦}$ ($\sqrt{٣}$ − ١)
١٢	إذا كان ق ، هـ إقترانين معرفين على الفترة [١ ، ٥] وكان ق (س) = ٢س − ١ ، هـ (س) = س ق (س) + ٢ وكانت $\sigma_{٤}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } جد م ($\sigma_{٤}$ ، هـ) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر-١}$	٥٨
١٣	إذا كان ق (س) = ٢ − س وكانت $\sigma_{٦}$ تجزئة سداسية منتظمة للفترة [−٢ ، ٤] جد م ($\sigma_{٦}$ ، ق) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$	٣
١٤	إذا كانت النسبة بين قيمتي العنصر الخامس إلى العنصر السادس في التجزئة المنتظمة $\sigma_{ن}$ على [−١ ، ٧] تساوي ٣ : ٥ جد قيمة ن	٢٠
١٥	إذا كان ق (س) = جتا ٢س وكانت $\sigma_{٤}$ = { ٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ } تجزئة للفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] جد م ($\sigma_{٤}$ ، ق) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$	$-\frac{\pi}{٨}$
١٦	قباطية : ٢٠١٣ تجريبي ✍ ليكن ق (س) = أس + ٣ ، س ∈ [١ ، ٤] ، $\sigma_{٣}$ تجزئة ثلاثية منتظمة لهذه الفترة فإذا كان م ($\sigma_{٣}$ ، ق) = ٢٧ فأوجد قيمة أ متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$	أ = ٢

١٧	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ١٤] وكان العنصر الخامس والسابع : ٦ ، ١٠ على الترتيب ، أوجد : ١) طول الفترة الكلية ٢) قيمة ن	١٦ ٨
١٨	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان ق (س) = ٥س − ٢ معرفاً على الفترة [١ ، ب] وكانت $\sigma_{ه}$ تجزئة خماسية منتظمة لهذه الفترة بحيث م ($\sigma_{ه}$ ، ق) = ٣٦ ، أوجد قيمة ب علماً بأن $س^*_{ر} = س_{ر}$	٤

٥ – ٢ التكامل المحدود

ملخص الـــدرس

متطلبات هامة قبل دراسة الموضوع :

قوانين المجموع (سيجما)

- $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}} \pm \text{ع}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}}) \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}})$
- $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ} (\text{ك}_{\text{ر}}) = \text{أ} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}})$
- $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{أ} \, \text{ن}$
- $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$
- $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ر}-1) = \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}$

نهاية الإقترانات عندما س ⟵ ± ∞

بالنسبة لنهاية الإقتران النسبي أي الإقتران ق (س) = $\frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}$:

١) إذا كان أكبر أس في البسط أكبر من أكبر أس في المقام يكون ناتج النهاية إما ∞ أو – ∞

مثال : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{10\text{س}^9 + 3\text{س}}{5\text{س}^7 + 3\text{س}^2 - 2} = \infty$

٢) إذا كان أكبر أس في البسط أصغر من أكبر أس في المقام يكون ناتج النهاية صفر

مثال : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{10\text{س}^7 + 3\text{س}}{5\text{س}^9 + 3\text{س}^2 - 2} = \text{صفر}$

٣) إذا كان أكبر أس في البسط يساوي أكبر أس في المقام يكون ناتج النهاية = $\frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

مثال : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{10\text{س}^7 + 3\text{س}}{5\text{س}^7 + 3\text{س}^2 - 2} = \frac{10}{5} = 2$

أولاً : تعريف التكامل المحدود

تعريف

إذا كان ق (س) إقتراناً معرفاً ومحدوداً في الفترة [أ ، ب] وكان $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م} (\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \text{ل}$

لجميع قيم $\text{س}^{*}_{\text{ر}} \in [\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$ فإن الإقتران ق (س) يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} = \text{ل}$ (نسمي أ ، ب حدود التكامل)

مثال استخدم تعريف التكامل لحساب $\int_{١}^{٣} (١ - ٢\text{س})\, \text{د س}$ متخذاً $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}-١}$

الحـــل

$$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{٣ - ١}{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{ن}}$$

$$\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}-١} = ١ + \frac{٢}{\text{ن}}(\text{ر} - ١) \Leftarrow \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}-١}) = ١ - ٢\left(١ + \frac{٢}{\text{ن}}(\text{ر} - ١)\right)$$

$$= ١ - ٢ - \frac{٤}{\text{ن}}(\text{ر} - ١) = -١ - \frac{٤}{\text{ن}}(\text{ر} - ١)$$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{٢}{\text{ن}}\, \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}-١}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{٢}{\text{ن}} \left(-١ - \frac{٤}{\text{ن}}(\text{ر} - ١)\right)$$

$$= \frac{٢}{\text{ن}}\left(-\text{ن} - \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ر} - ١)\right) = -٢ - \frac{٨}{\text{ن}^{٢}}\left(\frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢}\right) = -٢ - \frac{٤(\text{ن} - ١)}{\text{ن}}$$

$$\int_{١}^{٣} (١ - ٢\text{س})\, \text{د س} = \lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \left(-٢ - \frac{٤(\text{ن} - ١)}{\text{ن}}\right)$$

$$= -٢ - ٤ = -٦$$

ثانياً : نظريات مهمة على قابلية الإقتران ق (س) للتكامل في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١)

إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب] فإنه يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

نظرية (٢)

إذا كان ق (س) إقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] وكان الإقتران هـ (س) = ق (س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب] عدا عند مجموعة منتهية من قيم س في تلك الفترة فإن هـ (س) يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]

ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ هـ (س) د س = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) د س

مثال

بين أن ق (س) = $\begin{cases} \text{٣س}^{٢} & \text{، س} \neq ١ \\ ٦ & \text{، س} = ١ \end{cases}$ قابل للتكامل على الفترة [٠ ، ٢]

الحــــل

خذ الإقتران هـ (س) = ٣س^{٢}

نلاحظ أن : هـ (س) = ق (س) ∀ س ∈ [٠ ، ٢] عدا عند س = ١

∵ هـ (س) = ٣س^{٢} إقتران كثير حدود قابل للتكامل على [٠ ، ٢] لأنه متصل

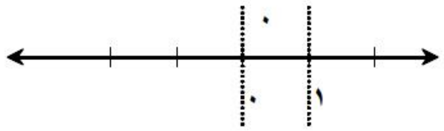
⇐ ق (س) = $\begin{cases} \text{٣س}^{٢} & \text{، س} \neq ١ \\ ٦ & \text{، س} = ١ \end{cases}$ قابل للتكامل على الفترة [٠ ، ٢]

مثال إذا كان ق (س) = [س] معرفاً على الفترة [٠ ، ١] فبين أن ق (س) قابل للتكامل على الفترة [٠ ، ١] ثم جد $\int_{٠}^{١}$ [س] د س

الحـــــل

خذ الإقتران هـ (س) = ٠

[س]



بإعادة تعريف الإقتران ق (س) = [س] نجد أن [س] = ٠ لكل س في الفترة ٠ ⩽ س < ١

نلاحظ أن : ق (س) = هـ (س) = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ١] عدا عند س = ١

∵ هـ (س) = ٠ إقتران ثابت قابل للتكامل على [٠ ، ١] لأنه متصل

⇐ ق (س) = [س] قابل للتكامل على الفترة [٠ ، ١]

ويكون $\int_{٠}^{١}$ [س] د س = $\int_{٠}^{١}$ ٠ د س = صفر

ورقة عمل (١) — التكامل المحدود

إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ إقتراناً متصلاً على الفترة $[١ ، ٢]$ وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث إن $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{٧\text{ن} - ٣\text{ن}^٢}{٣\text{ن}^٢}$ فإن $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س}$ يساوي			
أ) $\frac{٢}{٣}$	ب) $-\frac{٢}{٣}$	ج) ١	د) −١
٢) جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}$ معرفاً على $[١ ، \text{ب}]$ وكان $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = ٩ + \frac{(٣\text{ن}+١)(٥\text{ن}-١)}{\text{ن}^٢}$ جد قيمة الثابت ب؟			
أ) ٣	ب) ٦	ج) ٥	د) ٤
٣) فلسطين : ٢٠١٣ إكمال — إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ إقتراناً متصلاً على الفترة $[١ ، ٣]$ وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = -٢ - \frac{٥ - ٣\text{ن}}{٢\text{ن}}$ فإن $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س}$ يساوي			
أ) $-\frac{٧}{٢}$	ب) $-\frac{١}{٢}$	ج) $\frac{٧}{٢}$	د) $-\frac{٩}{٢}$
٤) فلسطين : ٢٠١٦ — إذا كان $\text{ق} : [-١ ، ٣] \longrightarrow \text{ح}$ إقتراناً متصلاً على الفترة وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = -٤ - \frac{٥ - ٢\text{ن}}{\text{ن}}$ فإن $\int_{-١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س}$ يساوي			
أ) ٦	ب) ٤	ج) ٢	د) −٢
٥) فلسطين : ٢٠١٤ إكمال — إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ إقتراناً معرفاً ومحدداً على الفترة $[٠ ، ٢]$ وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{٢\text{أ}\text{ن}^٢ + ٣\text{أ}\text{ن} + \text{أ}}{٣\text{ن}^٢}$ فإن قيمة الثابت أ التي تجعل $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = \frac{٨}{٣}$ هي :			
أ) ٨	ب) ٤	ج) ٣	د) صفر
٦) طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣$ ، $\text{س} \in [١ ، \text{ب}]$ وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = ٢ + \frac{٥\text{ن}}{١ - \text{ن}^٢}$ عندما $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ ما قيمة ب؟			
أ) صفر	ب) ١	ج) ٢	د) ٣


٧ إذا كان ق(س) إقتران قابل للتكامل على الفترة [−١ ، ٥] وكان م($\sigma_{ن}$ ، ق) = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣ن - ١}{٢ - ٤ن}$

∀ س ∈ [−١ ، ٥] فإن $\int_{-١}^{٥}$ ق(س) د س يساوي

أ) $-\frac{١}{٢٠}$	ب) $\frac{١}{٢٠}$	ج) $\frac{٤}{٥}$	د) $\frac{٣}{١٠}$

٨ فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كانت م($\sigma_{ن}$ ، ق) = ٦ + $\frac{٢ن^{٢} + ٢ن}{ن^{٢}}$: $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة

[١ ، ٤] فما قيمة $\int_{١}^{٤}$ ق(س) د س ؟

أ) ٦	ب) ٨	ج) ١٠	د) ١٢

إجابات الإختيار من متعدد (التكامل المحدود)

١	د	−١	٢	ج	٥	٣	ج	$\frac{٧}{٢}$
٤	أ	٦	٥	ب	٤	٦	د	٣
٧	ب	$\frac{١}{٢٠}$	٨	ب	٨	٩		

لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

ورقة عمل (٢) التكامل المحدود

١	فلسطين : ٢٠٠٩ إستخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد : $\int_{١}^{٣} (٢س - ٤)\, د\, س$	صفر
٢	فلسطين : ٢٠١٠ إستخدم تعريف التكامل المحدود لحساب : $\int_{-٣}^{١} (٣س + ٢)\, د\, س$	٤-
٣	جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي بين أن $ق(س) = \frac{س^{٣} - جا^{٢}س - جتا^{٢}س}{س - ١}$ قابل للتكامل على الفترة [−٢ ، ٢]	
٤	قباطية : ٢٠١٤ تجريبي إذا كان $ق(س) = ٢س + ٣$ حيث $س \in [٢ ، ٥]$ باستخدام تعريف التكامل المحدود جد : $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, د\, س$ متخذاً $س_{ر}^{*} = س_{ر}$	٣٠
٥	فلسطين : ٢٠٠٨ باستخدام تعريف التكامل المحدود جد : $\int_{٠}^{٢} (س + ١)\, د\, س$ متخذاً $س_{ر}^{*} = س_{ر}$	٤
٦	إذا كان $ق(س) = ٤ - ٢س$ حيث $س \in [٠ ، ٤]$ باستخدام تعريف التكامل المحدود جد : $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, د\, س$ متخذاً $س_{ر}^{*} = س_{ر}$	صفر
٧	جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي استخدام تعريف التكامل المحدود لحساب $\int_{١}^{٣} س\left(١ - \frac{٢}{س}\right) د\, س$ متخذاً $س_{ر}^{*} = س_{ر}$	صفر
٨	بين أن $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - س & ، س \neq ٣ \\ ٤ & ، س = ٣ \end{cases}$ قابل للتكامل على الفترة [٢ ، ٤]	
٩	بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي استخدم تعريف التكامل لحساب $\int_{-١}^{٣} (٧ - ٢س)\, د\, س$	
١٠	إذا كان $ق(س) = [س + ١]$ فبين أن $ق(س)$ قابل للتكامل على الفترة [١ ، ٢] ثم جد $\int_{١}^{٢} [س + ١]\, د\, س$	

٥ – ٣ العلاقة بين التفاضل والتكامل

ملخص الـــدرس

تعريف

إذا كان م (س) هو أحد الإقترانات الأصلية للإقتران المتصل ق (س) الفترة [ﺃ ، ب] فإن المقدار م (ب) – م (ﺃ) يساوي التكامل المحدود للإقتران ق (س) في الفترة [ﺃ ، ب] ونرمز له بالرمز $\int_{ﺃ}^{ب}$ ق (س) د س

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

١. إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً في الفترة [ﺃ ، ب] و كان م (س) إقتراناً أصلياً للإقتران ق (س)

فإن $\int_{ﺃ}^{ب}$ ق (س) د س = م (س) $\Big|_{ﺃ}^{ب}$ = م (ب) – م (ﺃ)

٢. ⬅ إذا كان ق (س) إقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [ﺃ ، ب]

فإن ت (س) = $\int_{ﺃ}^{س}$ ق (ص) د ص ∀ س ∈ [ﺃ ، ب] ويسمى ت (س) الإقتران المكامل للإقتران ق (س)

⬅ إذا كان ق (س) إقتراناً متصلاً فإن تَ (س) = ق (س) ∀ س ∈] ﺃ ، ب [

نظرية

إذا كان ت (س) هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) المعرف في الفترة [ﺃ ، ب] فإن :

١. ت (س) إقتران متصل دائماً في الفترة [ﺃ ، ب]

٢. ت (ﺃ) = ٠ (حيث ﺃ بداية الفترة)

ملاحظة

⬅ $\int_{ﺃ}^{ب}$ ق (س) د س = ت (ب) – ت (ﺃ) (لأن تَ (س) = ق (س) أي أن ت (س) إقتران أصلي)

⬅ $\frac{د}{د\,س}\left(\int_{ﺃ}^{ب} ق (س) د س \right)$ = ٠ (مشتقة التكامل المحدود دائماً تساوي صفر)

مثال

إذا كان $\int_{١}^{أ} ٣س^{٢} + ٦س \; د س = ٠$ جد قيمة الثابت أ ؟

الحـــــل

$\int_{١}^{أ} ٣س^{٢} + ٦س \; د س = \left(س^{٣} + ٣ س^{٢} \right) \Big|_{١}^{أ} = أ^{٣} + ٣ أ^{٢} - (١ + ٣) = أ^{٣} + ٣ أ^{٢} - ٤$

$\Leftarrow \; أ^{٣} + ٣ أ^{٢} - ٤ = ٠$ وبتحليل المقدار $أ^{٣} + ٣ أ^{٢} - ٤$ بالقسمة التركيبية أو اي طريقة ينتج أن :

$(أ - ١)(أ + ٢)^{٢} = ٠ \; \Leftarrow \; أ = ١ \;،\; أ = -٢$

مثال

إذا كان ق (س) إقتران متصل على [−١ ، ٦] وكان $ت (س) = \begin{cases} أس - ٣ \;،\; -١ \leqslant س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ب س + ٥ \;،\; ٢ \leqslant س \leqslant ٦ \end{cases}$

هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) على الفترة جد :

١) قيمتي الثابتين أ ، ب   ٢) $\int_{١}^{٣} ق(س) \; د س$ ٣) ق (٥)

الحـــــل

١) $ت (-١) = ٠ \; \Leftarrow \; أ (-١) - ٣ = ٠$ ومنها $أ = -٣$

ت (س) = متصل عند س = ٢ $\Leftarrow \; \lim\limits_{س \to ٢^{+}} ت (س) = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} ت (س)$

$\Leftarrow \; ١٢ - ٢ب + ٥ = -٣ (٢) - ٣ \; \Leftarrow \; -٢ب + ١٧ = -٩$ ومنها $ب = ١٣$

٢) $ت (س) = \begin{cases} -٣س - ٣ \;،\; -١ \leqslant س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ١٣ س + ٥ \;،\; ٢ \leqslant س \leqslant ٦ \end{cases}$

$\int_{١}^{٣} ق(س) \; د س = ت (٣) - ت (١) = (٢٧ - ٣٩ + ٥) - (-٣ - ٣) = -٧ + ٦ = -١$

٣) $ق (٥) = ت' (٥) = (٦س - ١٣)$ عند $س = ٥ \; \Leftarrow \; ق (٥) = ٦ (٥) - ١٣ = ١٧$

ورقة عمل (١) العلاقة بين التفاضل والتكامل

إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) وكان م (٢) = ٥ ، م́ (٢) = ٣ ، م (١) = ٧ ، م́ (١) = ٢
فإن $\int_{١}^{٢}$ ق (س) د س يساوي

أ ١	ب -١	ج ٢	د -٢

٢) إذا كان م (س) = $٣س^{٢} + ٢س + ج$ إقتراناً أصلياً للإقتران المتصل ق (س) فإن $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) د س = :

أ ٦	ب -٦	ج ١٧	د ٢٤

٣) إذا كان ت (س) هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) على الفترة [١ ، ٤] وكان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) في نفس الفترة بحيث م (٤) = ١٢ ، ت (٤) = ٧ فإن م (١) يساوي

أ ٥	ب ١٩	ج -٥	د -١٢

٤) الإقتران المكامل للإقتران ق (س) = $٥س^{٤} + ٤س$ على الفترة [١ ، ٤] هو :

أ $س^{٥} + ٢س^{٢} + ٣$	ب $س^{٥} + ٢س^{٢} - ٣$	ج $٢٠س^{٣} + ٤$	د $٥س^{٤} + ٤س - ٣$

٥) فلسطين : ٢٠٠٧ دراسات
إذا كان $\int_{-١}^{ب} ٥$ د س = ٢٥ فإن ب = :

أ ٦	ب ٥	ج ٤	د ٣

٦) رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي
إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) المتصل على [-١ ، ٤]
وكان م″ (-١) = ٢ ، م″ (٤) = -٣ ، فإن قيمة $\int_{-١}^{٤}$ ($\frac{١}{٥} - \frac{٢}{٥}$ ق″ (س)) د س يساوي

أ -١	ب ٣	ج -٦	د ٤

٧) فلسطين : ٢٠٠٧
إذا كان ت (س) = $س^{٢} + ٥س + ج$ هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) على الفترة [١ ، ٣] فإن ج =

أ -٢٤	ب ٢٤	ج -٦	د ٦

٨) إذا كان ق إقتران متصل على ح وكان $\int_{س}^{٢}$ ق (ص) د ص = $س^{٢} + ٥س - ١٤$ فإن ق (٤) تساوي :

أ -١٣	ب -٢٢	ج ١٣	د ٢٢

٩ إذا كان ق(س) إقتران قابل للتكامل على الفترة [٠ ، ٦] فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة	
Ⓟ $\int_{0}^{س}$ ق (ص) د ص = س – جتاس	Ⓑ $\int_{0}^{س}$ ق (ص) د ص = س – جتاس – ١
Ⓙ $\int_{0}^{س}$ ق (ص) د ص = س – جتاس + ١	Ⓓ $\int_{0}^{س}$ ق (ص) د ص = س – جتاس + ٣

١٠ فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال

إذا كان ت (س) = $\int_{0}^{س}$ ق (ص) د ص = ١ + س – جتاس حيث ق (س) متصل على الفترة [٠ ، π] فإن ق ($\frac{\pi}{٢}$) =

Ⓟ ١ + $\frac{\pi}{٢}$	Ⓑ ٢	Ⓙ ١	Ⓓ –١

١١ فلسطين : ٢٠١٦ إكمال

$\int_{٢}^{٣} \frac{١}{س^{٢}}$ د س يساوي

Ⓟ $\frac{١}{٣}$	Ⓑ $\frac{١}{٢}$	Ⓙ $\frac{١}{٦}$	Ⓓ $\frac{٥}{٦}$

١٢ قيمة $\frac{د}{د س} \int_{١}^{هـ}$ لو$_{هـ}$ س د س =

Ⓟ ١	Ⓑ صفر	Ⓙ هـ – ١	Ⓓ $\frac{١}{هـ}$

١٣ فلسطين : ٢٠١١

إذا كان ت (س) = $\int_{P}^{س}$ ق (ص) د ص = س^{٣} – ١ فإن قيمة P تساوي :

Ⓟ –١	Ⓑ صفر	Ⓙ ١	Ⓓ ٢

١٤ أردن : ٢٠١٢ شتوي

إذا كان جـ > ١ وكان $\int_{١}^{جـ} \frac{١}{س}$ د س = ٣ فإن قيمة الثابت جـ = :

Ⓟ هـ^{٤}	Ⓑ هـ^{٣}	Ⓙ ٤	Ⓓ ٣

١٥ فلسطين : ٢٠١٦ إكمال

$\int_{١}^{٢}$ ٢ $\sqrt[٣]{س}$ × س$^{\frac{٢}{٣}}$ د س يساوي

Ⓟ –٣	Ⓑ ١	Ⓙ ٢	Ⓓ ٣

١٦ فلسطين : ٢٠٠٧ دراسات

إذا كان $\int_{0}^{س}$ ق (ص) د ص = س جتا π س وكان ق (س) متصل فإن : ق (٤) يساوي

Ⓟ صفر	Ⓑ ٤	Ⓙ –٤	Ⓓ ١

١٧) إذا كان م(س) = أس^3 + ب س^2 إقتران أصلي للإقتران ق (س) وكان ق (١) = ٦ ، $\int_{٠}^{٢}$ ق (س) د س = ٢٠
فإن قيمتي كل من أ ، ب على الترتيب :

أ) ١ ، ٥	ب) ٤ ، −٣	ج) −٤ ، ٣	د) ٦ ، ٢٠

١٨) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ (٢س + أ) د س = ١٢ فإن قيمة أ = :

أ) ٩	ب) ٣	ج) $\frac{١}{٣}$	د) −٣

١٩) فلسطين : ٢٠١٢
إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) على الفترة [٢ ، ٣] وكان
م (٢) = ٤ ، م (٣) = ١٠ فإن $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) د س يساوي

أ) ١٠	ب) ٦	ج) ٤	د) ١

٢٠) قيمة $\frac{د}{د س} \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^2 + ٤}$ د س =

أ) $\sqrt{١٣}$	ب) $\sqrt{\text{س}^2 + ٤}$	ج) س^2 + ٤	د) صفر

٢١) وإذا كان ق (س) متصل فإن قيمة الثابت أ والتي تجعل $\int_{٣}^{\text{س}}$ ق (ص) د ص = س^2 + أ هي

أ) −٩	ب) −٣	ج) صفر	د) ٣

٢٢) فلسطين : ٢٠١٠ إكمال

إذا كان م (س) = $\frac{٥ \text{س}}{\text{س}^2 + ٣}$ إقتراناً أصلياً للإقتران ق (س) فإن $\int_{١}^{٢}$ ق (س) د س = :

أ) $\frac{٥}{٢٨}$	ب) $-\frac{٥}{٢٨}$	ج) $\frac{١٠}{٧}$	د) $\frac{١٠}{٤}$

٢٣) فلسطين : ٢٠١٥
إذا كان $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\text{س}}$ ق (ص) د ص = ٢جاس + جـ فإن قيمة جـ = :

أ) ٢	ب) صفر	ج) ١	د) −٢

٢٤) فلسطين : ٢٠١٤ إكمال

الإقتران المكامل ت (س) للإقتران ق (س) = ٣س^2 − ٢س + ١ على الفترة [٢ ، ٥] هو :

أ) س^3 − س^2 + س − ٦	ب) س^3 − س^2 + س + ٦	ج) ٦س − ٢	د) ٣س^3 − ٢س + ١

٢٥) $\int_{١}^{٤}$ (٥ + $\int_{٣}^{١}$ ٥ د س) د س = :

أ) ٢٠	ب) −١٠	ج) ١٠	د) −١٥

(٢٦) إذا كان م (س) ، هـ (س) إقترانين أصليين للإقتران ق (س) وكان $\int_{0}^{7}$ (م (س) – هـ (س)) د س = ٢٨ فإن : $\int_{1}^{5}$ س (م (س) – هـ (س)) د س يساوي			
أ) ٤٨	ب) ٣٣٦	ج) ١١٢	د) ١٢
(٢٧) إذا كان أ = $\frac{1}{2}$ فإن $\int_{2}^{4أ} \frac{\sqrt{1} - \sqrt{س}}{\sqrt{س + 1} + \sqrt{س}}$ د س = :			
أ) ٢	ب) صفر	ج) ٨	د) ٤
(٢٨) إذا كان $\int_{1}^{2}$ ٩س د س = $\int_{0}^{1}$ (س + ب) د س فإن قيمة ب = :			
أ) ٩	ب) ١٠	ج) ١٣	د) ١٤
(٢٩) إذا كان ق (س) = س لو$_{هـ}$ (س) فإن $\int_{1}^{هـ}$ ق'' (س) د س = :			
أ) ١	ب) ٢	ج) هـ	د) ٣
(٣٠) جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان ص = $\int$ هـ^{أس} لو$_{هـ}$ س د س + $\int_{1}^{هـ}$ (لو$_{هـ}$ س)^{2} د س فما قيمة الثابت أ إذا كان $\frac{د^2ص}{د س^2}$ = هـ عند س = ١			
أ) ٢	ب) هـ	ج) ١	د) صفر
(٣١) نابلس : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان ق (س) متصل على الفترة [أ ، ب] ، م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) ، ت (س) هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) على نفس الفترة وكان هـ (س) = م (س) – ت (س) فإن هـ' (س) يساوي			
أ) صفر	ب) ق' (س)	ج) م' (س)	د) ت (س)
(٣٢) جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي $\int_{أ}^{ب}$ ق' (هـ (س)) هـ' (س) د س =			
أ) ق' (ب) – ق' (أ)		ب) ق' (هـ (ب)) – ق' (هـ (أ))	
ج) ق (ب) – ق (أ)		د) ق (هـ (ب)) – ق (هـ (أ))	

إجابات الإختيار من متعدد (العلاقة بين التفاضل والتكامل)

١	د	−٢	٢	جـ	١٧	٣	أ	٥
٤	ب	س^{٥} + ٢س^{٢} − ٣	٥	جـ	٤	٦	ب	٣
٧	جـ	−٦	٨	أ	−١٣	٩	جـ	$\int_{٠}^{س}$ ق (ص) د ص = س − جتاس + ١
١٠	ب	٢	١١	جـ	$\frac{١}{٦}$	١٢	ب	صفر
١٣	جـ	١	١٤	ب	هـ^{٣}	١٥	د	٣
١٦	د	١	١٧	ب	٤ ، −٣	١٨	ب	٣
١٩	ب	٦	٢٠	د	صفر	٢١	أ	−٩
٢٢	أ	$\frac{٥}{٢٨}$	٢٣	د	−٢	٢٤	أ	س^{٣} − س^{٢} + س − ٦
٢٥	د	−١٥	٢٦	أ	٤٨	٢٧	ب	صفر
٢٨	جـ	١٣	٢٩	أ	١	٣٠	جـ	١
٣١	أ	صفر	٣٢	د	ق(هـ (ب)) − ق(هـ (أ))	٣٣		

لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

ورقة عمل (٢) العلاقة بين التفاضل والتكامل

١	جد $\int_{٠}^{٣} \left(٣س^{٢} - \int_{٢}^{٢} هـ^{س} \, دس \right) دس$	٢٧
٢	إذا كان ق (س) = ٢س + ك ، ك ∈ ح ، س ∈ [٠ ، ٤] ، $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة على نفس الفترة بحيث م ($\sigma_{ن}$ ، ق) = ٨ − $\frac{١}{ن}$ فإن قيمة ك =	٢−
٣	قباطية : ٢٠٠٨ تجريبي إذا كان ق (س) متصلاً ، أ + $\int_{٢}^{س}$ ق (ص) د ص = $س^{٢}$ − جـ س + ١٨ وكان ق (٥) = ٧ جد الثابتين أ ، جـ	أ = ١٦ ، جـ = ٣
٤	فلسطين : ٢٠١٥ إذا كان ق (س) متصلاً على الفترة [١ ، ٥] وكان إقترانه المكامل ت (س) = { ٢$س^{٢}$ − جـ س ، ١ ⩽ س < ٢ ؛ أ$س^{٣}$ − ب س ، ٢ ⩽ س ⩽ ٥ } جد : قيم الثوابت أ ، ب ، جـ	أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = ٠ ، جـ = ٢
٥	إذا كان ت (س) = { أس − ٤ ، −١ ⩽ س < ١ ؛ $س^{٢}$ + ب س + جـ ، ١ ⩽ س ⩽ ١٠ } حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، ت (س) هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) المتصل على الفترة [−١ ، ١٠] جد : قيم الثوابت أ ، ب ، جـ	أ = −٤ ب = −٦ جـ = −٣
٦	فلسطين : ٢٠١١ إذا كان ق (س) متصلاً على الفترة [٠ ، ٥] وكان إقترانه المكامل ت (س) = { $س^{٢}$ ، ٠ ⩽ س < ٢ ؛ ٤س + أ ، ٢ ⩽ س ⩽ ٥ } جد : ① قيمة أ ② $\int_{١}^{٤}$ ق (س) د س ③ ق (٢)	أ = −٤ ١١ ٤
٧	إذا كان م (س) ، هـ (س) إقترانين أصليين للإقتران ق (س) وكان : $\int_{١}^{٥}$ (م (س) − هـ (س)) د س = ٨ فأوجد $\int_{-١}^{٢}$ س (م (س) − هـ (س)) د س	٣

٨	إذا كان م (س) ، ل (س) إقترانين أصليين للإقتران ق (س) وكان : $\int_{2}^{8}$ (ل (س) – م (س)) د س = ١٨ فأوجد $\int_{3}^{5}$ (م (س) – ل (س)) د س	٦–
٩	ليكن ق (س) إقتراناً متصل على مجاله ، $\int$ ق (س) د س = قا^{2}س – ظا^{2}س + س^2 جد $\int_{-1}^{2}$ ق$'$ (س) د س	٦
١٠	نابلس : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان ك (س) إقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ، م (س) = ٣ + $\int_{0}^{س} \frac{جاص + 1}{ص^2 + 2}$ د ص ، م (٠) = ك (٠) ، م$'$ (٠) = ك$'$ (٠) ، م$''$ (٠) = ك$''$ (٠) جد قاعدة الإقتران ك (س)	ك (س) = $\frac{1}{4}$ س^2 + $\frac{1}{2}$ س + ٣
١١	أردن : ٢٠١٧ صيفي إذا كان م (س) = س هـ^{س} – هـ^{س} إقتراناً أصلياً للإقتران ق (س) ، $\int_{0}^{2}$ (٤ ق (س) + هـ^2) د س + $\int_{4}^{هـ^2} \frac{أ}{هـ - 2}$ د س = ٢٨ جد قيمة الثابت أ	أ = ٦ (٢ – هـ)
١٢	أردن : ٢٠١١ شتوي إذا كان ق (س) كثير حدود وكان ق (٠) = ٥ ، ق$''$ (س) = ٤ ، $\int_{0}^{1}$ ق$'$ (س) د س = ٣ جد قاعدة الإقتران ق (س)	ق (س) = ٢س^2 + س + ٥
١٣	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كان ت (س) = { أس – ٣ ، ١ ≤ س < ٤ ؛ ب س^2 – ٢س + ١ ، ٤ ≤ س ≤ ٦ } هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) على الفترة [١ ، ٦] جد : (١) قيمتي الثابتين أ ، ب (٢) $\int_{2}^{5}$ ق (س) د س	أ = ٣ ، ب = ١ ١٣
١٤	فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال إذا كان ت (س) هو الإقتران المكامل للإقتران ق (س) على الفترة [١ ، ٤] حيث : ت (س) = { ٢س + ب ، ١ ≤ س < ٢ ؛ أس^2 – ٦ ، ٢ ≤ س ≤ ٤ } جد قيمتي الثابتين أ ، ب ثم جد $\int_{1}^{3}$ ق (س) د س	أ = ٢ ، ب = ٢– ١٢

١٥	إذا كان $ق(س) = هـ^{ظاس} + أ\ لو_{هـ} جتاس + \int_{١}^{\frac{\pi}{٣}} جاس\ د س$ وكان $ق'(\frac{\pi}{٤})$ $= ٢هـ + ١$ جد قيمة أ	١-
١٦	إذا كان $\int_{-١}^{١} س^{ن}\ د س = ٢ \int_{٠}^{١} س^{ن}\ د س$ حيث $ن \in ص^{+}$ بين أن : ن يجب أن يكون عدد زوجي	

٥ – ٤ خواص التكامل المحدود

ملخص الدرس

للتكامل المحدود خصائص تسهل حساب قيمة التكامل نذكر عدد منها :

خواص التكامل المحدود

إذا كانت ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن :

١) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = - \int_{ب}^{أ} ق(س)\, د س$ ، (عند تبديل حدود التكامل تقلب الإشارة)

٢) $\int_{أ}^{أ} ق(س)\, د س = ٠$ (عند تساوي حدي التكامل قيمته تساوي ٠)

٣) $\int_{أ}^{ب} ك\, د س = ك(ب - أ)$ (التكامل المحدود لمقدار ثابت)

٤) $\int_{أ}^{ب} ك\, ق(س)\, د س = ك \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س$ ، $ك \in ح$ (التكامل المحدود لضرب ثابت في إقتران)

٥) $\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \pm هـ(س) \right) د س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د س$

(التكامل المحدود لمجموع أو طرح إقترانين ويمكن تعميمه على أكثر من إقترانين)

نظرية

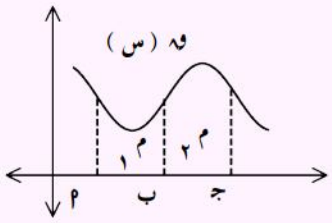
إذا كان ق(س) إقتراناً قابلاً للتكامل في [أ ، ب] وكان $ق(س) \geqslant ٠ \ \forall\ س \in [أ ، ب]$ فإن : $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \geqslant ٠$

خاصية المقارنة

إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب] وكان $ق(س) \geqslant هـ(س) \ \forall\ س \in [أ ، ب]$

فإن : $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \geqslant \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د س$

خاصية الإضافة



إذا كان ق(س) إقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة ف $\subseteq$ ح

وكان أ ، ب ، ج أي ثلاثة أعداد تنتمي للفترة ف فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$$

ملاحظة

خاصية الإضافة مهمة جداً في حساب تكامل الإقترانات متعددة القاعدة وخاصة إقترانات تحتوي صحيح س وقيمة مطلقة .

مثال

جد $\int_{1}^{3} \text{٢س} + [\text{س} - 1] \text{ دس}$

الحل

بإعادة تعريف [س − ١] في الفترة [١ ، ٣] نجد أن :

$$\int_{1}^{3} \text{٢س} + [\text{س} - 1] \text{ دس} = \int_{1}^{2} \text{٢س} + [\text{س} - 1] \text{ دس} + \int_{2}^{3} \text{٢س} + [\text{س} - 1] \text{ دس}$$

$$= \int_{1}^{2} \text{٢س} + 0 \text{ دس} + \int_{2}^{3} \text{٢س} + 1 \text{ دس} = \int_{1}^{2} \text{٢س دس} + \int_{2}^{3} \text{٢س} + 1 \text{ دس}$$

$$= \text{س}^2 \Big|_{1}^{2} + (\text{س}^2 + \text{س}) \Big|_{2}^{3} = (4 - 1) + ((9 + 3) - (4 + 2)) = 3 + 12 - 6 = 9$$

ورقة عمل (١)
خواص التكامل المحدود

إختر الإجابة الصحيحة

١) فلسطين : ٢٠١٣

إذا كان $ت(س) = \int_{س}^{٤} (٢ - ٢ص)\, دص$ فإن $ت'(س) =$:

أ) $٢س - س^٢$	ب) $٢ - ٢س$	ج) $٢س - ٢$	د) صفر

٢) أردن : ٢٠١١ صيفي

إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢ق(س) - ٤)\, دس = ٦$ ، $\int_{٤}^{٣} ق(س)\, دس = -١$ ، فإن $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس =$

أ) ٧	ب) ٨	ج) ٥	د) ١٥

٣) جنين : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان ع(س) ، هـ(س) إقترانين أصليين للإقتران ق(س) وكان

$\int_{٠}^{-١} (ع(س) - هـ(س))\, دس = -١٢$ فإن : $\int_{٠}^{٢} ٢س\, هـ(س)\, دس + \int_{٢}^{٠} ٢س\, ع(س)\, دس$ يساوي

أ) ٨	ب) −٨	ج) ٤	د) −٤

٤) إذا كان ق معرف على الفترة [٠ ، ١] وكانت $\sigma_ن$ تجزئة منتظمة لها بحيث $م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ن^٢ - ٢ن}{٣ن^٢}$ فإن

$\int_{١}^{٠} ٢ق(س)\, دس$ يساوي

أ) $\frac{١}{٣}$	ب) $\frac{٢}{٣}$	ج) $-\frac{١}{٣}$	د) $-\frac{٢}{٣}$

٥) فلسطين : ٢٠١٢

إذا كان $\int_{٠}^{٢} ق(س)\, دس = ٣$ ، $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس = ٥$ ، فإن $\int_{٣}^{٨} ق(س - ٣)\, دس =$:

أ) ٨	ب) ٥	ج) −٢	د) −٨

٦) رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان $\int_{أ}^{ب} (س^٢ + ٤س)\, دس \geqslant \int_{أ}^{ب} (س + ١٠)\, دس$ فإن

الفترة [أ ، ب] التي تحقق ذلك

أ) [٠ ، ٣]	ب) [−٥ ، ٢]	ج) [−٦ ، ٣]	د) [−٥ ، ٤]

٧) فلسطين : ٢٠١٤

إذا كان $\int_{-\pi}^{\pi} ظا^٢س\, دس = أ$ ، $\int_{\pi}^{-\pi} قا^٢س\, دس = ب$ ، فإن أ + ب = :

أ) ١	ب) صفر	ج) -٢π	د) ٢π

٨ أردن : ٢٠١٠ صيفي

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} = ٣$ فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} =$:

أ) -٦	ب) صفر	ج) -٣	د) ٦

٩ طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

$\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}\, \text{د س} =$

أ) صفر	ب) ١	ج) $\frac{٣}{٢}$	د) ١

١٠ أردن : ٢٠١٢ صيفي

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) \leqslant ٦\ \ \forall\ \text{س} \in [١ ، ٣]$ فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣} (٢\,\text{ق}(\text{س}) + ١)\, \text{د س}$ هي :

أ) ١٢	ب) ١٣	ج) ٢٤	د) ٢٦

١١ إذا كان $\text{م}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}^{٢} + ١}$ أصلياً للإقتران ق(س) فإن $\int_{٠}^{١} (\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\, \text{د س} =$:

أ) ١	ب) $\frac{١}{٢}$	ج) $\frac{٣}{٢}$	د) صفر

١٢ إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} = ٦$ ، $\int_{٣}^{١} \text{ل ق}(\text{س})\, \text{د س} = -٣$ ، فإن قيمة الثابت ل = :

أ) $-\frac{١}{٢}$	ب) $\frac{١}{٢}$	ج) -٦	د) ٢

١٣ قيمة $\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} + \int_{٥}^{٢} (\text{ق}(\text{س}) - ٢)\, \text{د س} =$

أ) -٦	ب) -٢	ج) ٦	د) ٧

١٤ إذا كان $\int_{١}^{٣} \frac{١}{٢}\,\text{ق}(\text{س})\, \text{د س} = ٢$ ، $\int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} = -٥$ ، فإن $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} =$:

أ) ٧	ب) ٩	ج) -٣	د) -١

١٥ فلسطين : ٢٠١٩

$\int_{٠}^{٣} [\frac{١}{٢}\text{س}]\, \text{د س} =$:

أ) $\frac{١}{٢}$	ب) ١	ج) $\frac{٣}{٢}$	د) ٢

١٦ إذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ٣] وكان ق(س) قابلاً للتكامل على نفس الفترة وكان

$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{٥\text{ن}^{٢} + ٢}{١٢\text{ن}^{٢} + ٢}$ فإن $\int_{٣}^{١} ٢\,\text{ق}(\text{س})\, \text{د س} =$:

أ) $\frac{٥}{١٢}$	ب) $\frac{٥}{٦}$	ج) $-\frac{٥}{٦}$	د) $-\frac{٥}{٣}$

١٧ إذا كان هـ إقتران قابل للتكامل على ح بحيث $\int_{1}^{2}$ هـ (س) د س = ٤ ، $\int_{1}^{5}$ هـ (س) د س = ٧ فإن $\int_{3}^{6}$ هـ (س − ١) د س يساوي

أ −٣	ب ٦	ج ٣	د −٦

١٨ أكبر قيمة للمقدار $\int_{0}^{\pi}$ (٣ − جاس) د س هي

أ ٢	ب π	ج 2π	د 3π

١٩ فلسطين : ٢٠١١

إذا كان $\int_{1}^{5}$ ٢ق (س) د س = ١٠ ، $\int_{1}^{7}$ ق (س) د س = ١٢ ، فإن $\int_{7}^{5}$ ق (س) د س = :

أ −٧	ب ٢	ج ٧	د ٢٢

٢٠ فلسطين : ٢٠١٣

$\int_{2}^{5}$ [س + ٣] د س يساوي

أ ٢١	ب ١٨	ج ١٣	د ١١

٢١ فلسطين : ٢٠١٢

$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{د س}}{1 - \text{جاس}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{د س}}{1 + \text{جاس}}$

أ $2\sqrt{3}$	ب $\frac{\sqrt{3}}{2}$	ج $\frac{1}{2\sqrt{3}}$	د $\frac{2}{\sqrt{3}}$

٢٢ إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) د س = −٣ ، $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق (س) د س = ١١ ، فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق (س) د س = :

أ −٨	ب ٨	ج ١٤	د −١٤

٢٣ $\int_{1}^{4} [\, \frac{1}{3}$ س + ٢] د س = :

أ ٧	ب ٦	ج ٩	د ٨,٥

٢٤ رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان أ = $\int_{1}^{3}$ (جا^{2}س + هـ$^{\text{س}}$) د س ، ب = $\int_{1}^{3}$ جتا^{2}س د س ، فإن أ + ب = :

أ هـ^{3} − هـ	ب ٢ + هـ^{3}	ج ٢ − هـ − هـ^{3}	د ٢ + هـ^{3} − هـ

٢٥ إذا كان ق : [١ ، ٣] ⟵ ح إقتراناً متصلاً على الفترة وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث

م ($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) = ٥ + $\frac{3\text{ن} - 1}{\text{ن}}$ فإن $\int_{1}^{3}$ ٢ (ق (س) + ١) د س يساوي

أ ٢٠	ب ١٨	ج ١٦	د ١٤

٢٦ إذا كان ق (س) $\geqslant$ ٣ ∀ س ∈ [−١ ، ٢] فإن أقل قيمة للمقدار $\int_{-1}^{2}$ (٥ ق (س) − ٢) د س هي :

أ ٣	ب ٤٥	جـ ٣٩	د ١٥

٢٧ إذا كان $\int_{5}^{1}$ ق (س) د س = ٢ ، $\int_{7}^{5}$ ق (س) د س = −٦ ، فإن $\int_{1}^{7}$ $\frac{\text{ق(س)}}{2}$ د س = :

أ −٤	ب ٤	جـ −٢	د ٢

٢٨ قيمة $\int_{-2}^{4}$ \| س \| د س يساوي :

أ ٨	ب ٦	جـ ١٠	د −١٠

٢٩ ق(س) إقتران معرف على الفترة [٠ ، ٢] و $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة لها بحيث م($\sigma_{ن}$ ، $\frac{1}{2}$ ق) = $\frac{4 + 5ن}{2ن}$

فإن $\int_{2}^{0}$ ق (س) د س يساوي

أ −٥	ب − $\frac{5}{2}$	جـ ٥	د $\frac{5}{2}$

٣٠ إذا كان $\int_{س}^{3}$ ق(ص) د ص = ٢س − س^{2} + جـ فإن قيمة الثابت جـ = :

أ −٣	ب ٣	جـ −٤	د صفر

٣١ فلسطين : ٢٠١٤

إذا كان $\int_{1}^{2}$ ٢ ق(س) د س = −٨ و $\int_{1}^{5}$ ق(س) د س = ٦ فإن : $\int_{5}^{8}$ ق(س − ٣) د س يساوي

أ ١٠	ب −٢	جـ ١٤	د −١٤

٣٢ طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان ق (س) = $\int_{س}^{2}$ (٣ص − ٢) د ص + $\int_{0}^{أ}$ ٣ص^{2} دص ، ق (٢) = ٨ فإن قيمة الثابت أ ؟

أ −٢	ب ٢	جـ ٨	د $\frac{8}{3}$

٣٣ إذا كان ق (س) $\geqslant$ ٦ وكان ق (س) متصل على ح فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{11}$ (٦ ق (س) + ١) د س هي

أ ٣,٧	ب ٣٧	جـ ٣٧٠	د ٧٣٠

٣٤ إذا كان $\int_{س}^{-1}$ ق (ص) د ص = −٣س^{2} + أ س^{3} وكان ق(س) متصل ∀ س ∈ ح فإن ق(١) يساوي

أ ٣	ب ١٥	جـ −٣	د −١٥

٣٥ إذا كان $\int_{١}^{٣}$ جـ د س = ٨ وكان $\int_{-٢}^{١}$ جـ ق(س) د س = −٤ ، $\int_{١}^{٠}$ ق(١ − س) د س = ٧ فإن :
$\int_{-٢}^{٠}$ ق(س) د س يساوي

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
−٨	٦	−٦	٨

٣٦ إذا كان $\int_{٣}^{٧}$ ق(س) د س = $\int_{٨}^{جـ}$ ق(س − ٥) د س فإن قيمة جـ تساوي :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
٣	٤	١٢	−٢

٣٧ أردن : ٢٠١٠ صيفي
إذا كان $\int_{١}^{أ} \sqrt{س}$ د س = ١ حيث أ ثابت فإن $\int_{١}^{أ} \frac{٢س}{\sqrt{س}}$ د س = :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
١	٢	٣	٤

٣٨ $\int_{-٢}^{١}$ | س − ٢ | د س يساوي

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
٤,٥	٧,٥	−٤,٥	−٧,٥

٣٩ فلسطين : ٢٠١٣
إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ق (س + ١) د س = −٥ ، $\int_{٠}^{٢}$ ٢ق (س) د س = −٤ ، فإن $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) د س = :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
٧	٣	−٧	−٣

٤٠ إذا كان $\int_{١}^{جـ}$ ق(س − ١) د س = $\int_{-٣}^{٤}$ ق(س + ٣) د س فإن قيمة جـ = :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
٦	٨	٩	١٠

٤١ إذا كان ق (س) ≥ ٥ وكان ق (س) متصل على ح فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ ق (س) + ١) د س هي :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
١٠	١١	٢٢	١٢

٤٢ $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) د س

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
$-\pi$	صفر	$\frac{\pi}{٢}$	π

٤٣ إذا كان ق (١) = ٣ ، ق (٤) = ٧ فإن $\int_{١}^{٤}$ (ق′(س) + ٢) د س = :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
١٤	١٠	٦	٢

٤٤ $\int_{-١}^{١}$ س | س | د س يساوي :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
$\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر	$\frac{١}{٣}$

٤٥) $\int_{-1}^{1} \frac{\text{جتا } 2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س} - \text{جتا}^2\text{س}} \, \text{د س} =$

(أ) ١	(ب) −١	(ج) ٢	(د) −٢

٤٦) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2 + \text{جتا}^2\text{س}) \, \text{د س} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جا}^2\text{س} \, \text{د س} =$:

(أ) $-\frac{3}{2}\pi$	(ب) $-\frac{\pi}{2}$	(ج) $\frac{\pi}{2}$	(د) $\frac{3}{2}\pi$

٤٧) فلسطين : ٢٠١٥

$\int_{7}^{10} [\frac{1}{3}\text{س} + 1] \, \text{د س} =$:

(أ) ٧	(ب) ١٠	(ج) ١١,٥	(د) ١٢

٤٨) بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان أ < ٠ < ب حيث ٣ أ − ب = − ١٠ وكان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} \, \text{د س} = 2$ فإن قيمة أ = :

(أ) −١	(ب) −٢	(ج) −٦	(د) −٤

٤٩) فلسطين : ٢٠١٧

إذا كان م(س) ، هـ(س) إقترانين أصليين للإقتران ق(س) بحيث أن

$\int_{2}^{4} \text{م(س) د س} - \int_{2}^{4} \text{هـ(س) د س} = 10$ فإن $\int_{1}^{3} 2\text{س} (\text{م(س)} - \text{هـ(س)}) \, \text{د س} =$

(أ) ٣٥	(ب) ٣٨	(ج) ٤٠	(د) ٤٥

٥٠) $\int_{0}^{2\pi} \text{جتاس د س}$ يقع بين القيمتين

(أ) ١ ، ٢ π	(ب) − ٢ π ، ٢ π	(ج) − ٢ π ، ١	(د) −١ ، ١

٥١) إذا كان ت(س) = $\int_{\text{س}}^{-1} (\text{ص}^3 - 3\text{ص}) \, \text{د ص}$ فإن ت َ(−٢) = :

(أ) ٢	(ب) −٢	(ج) −٩	(د) ٩

٥٢) $\int_{1}^{7} \text{ق(س) د س} - \int_{1}^{3} \text{ق(س) د س} =$:

(أ) $\int_{3}^{7} \text{ق(س) د س}$	(ب) $\int_{7}^{3} \text{ق(س) د س}$	(ج) $\int_{7}^{1} \text{ق(س) د س}$	(د) $\int_{1}^{7} \text{ق(س) د س}$

٥٣) $\int_{-2}^{-3} \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1} \, \text{د س} =$:

(أ) $\frac{1}{2}$ لو$_{\text{هـ}}$ ٢	(ب) $-\frac{1}{2}$ لو$_{\text{هـ}}$ ٢	(ج) − لو$_{\text{هـ}}$ ٢	(د) لو$_{\text{هـ}}$ ٢

٥٤ فلسطين : ٢٠١٦

إذا كان $\int_{0}^{3} ن(س+1)^{ن-1}\, دس = 15$ فإن قيمة ن = :

أ) ٨	ب) ٦	ج) ٤	د) ٢

٥٥ إذا كان ق(٢٥) = ١٠ ، ق(٤) = −٢ فإن $\int_{2}^{5} س\, ق'(س^2)\, دس$ = :

أ) ١٢	ب) ٨	ج) −١٢	د) ٦

٥٦ إذا كان $\int_{1}^{2} ق(س)\, دس = 3$ فإن $\int_{0}^{1} \left(2\, ق(س+1) + 3س^2 - 2\right) دس$ = :

أ) ٢	ب) ٤	ج) ٥	د) ٧

٥٧ أردن : ٢٠١٢ صيفي

إذا كان $\int_{-1}^{2} 3\, ق(س)\, دس = 6$ ، $\int_{5}^{2} ق(س)\, دس = 8$ ، فإن $\int_{-1}^{5} |ق(س)|\, دس$ = :

أ) −٦	ب) ٦	ج) ١٠	د) ١٤

٥٨ أردن : ٢٠١٢ شتوي

إذا كان ق(س) إقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة [١ ، ٢] وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤ فإن $\int_{1}^{2} 3\, ق'(س)\sqrt{ق(س)}\, دس$

أ) ١٤	ب) $\frac{63}{2}$	ج) ٧	د) $\frac{14}{3}$

٥٩ أردن : ٢٠٠٨ شتوي

$\int_{1}^{3} \left[4 - \frac{1}{2}س\right] دس$

أ) ١٠	ب) ٦	ج) ٧	د) ٥

٦٠ $\int_{1}^{2} \frac{س^2+1}{س^3+3س}\, دس$ = :

أ) ٣ (لو$_{هـ}$ ٧ − لو$_{هـ}$ ٢)	ب) $\frac{1}{3}$ (لو$_{هـ}$ ٧ − لو$_{هـ}$ ٢)
ج) $\frac{1}{3}$ لو$_{هـ}$ ٧ − لو$_{هـ}$ ٢	د) لو$_{هـ}$ ٣ − لو$_{هـ}$ ٢

٦١ أردن : ٢٠٢٠ تكميلي

$\int_{0}^{1} \left(|س-3| + |س+3|\right) دس$

أ) ١٢	ب) ٨	ج) ٦	د) ١٠

إجابات الإختيار من متعدد (خواص التكامل المحدود)

١	ج	٢س − ٢	٢	ب	٨	٣	ب	−٨
٤	د	$-\frac{٢}{٣}$	٥	أ	٨	٦	ب	[−٥ ، ٢]
٧	ج	−٢π	٨	د	٦	٩	ب	١
١٠	د	٢٦	١١	ج	$\frac{٣}{٢}$	١٢	ب	$\frac{١}{٢}$
١٣	ج	٦	١٤	ب	٩	١٥	ب	١
١٦	ج	$-\frac{٥}{٦}$	١٧	ج	٣	١٨	د	٣π
١٩	أ	−٧	٢٠	ب	١٨	٢١	أ	$٢\sqrt{٣}$
٢٢	د	−١٤	٢٣	أ	٧	٢٤	د	٢ + هـ^{٣} − هـ
٢٥	أ	٢٠	٢٦	ج	٣٩	٢٧	د	٢
٢٨	ج	١٠	٢٩	أ	−٥	٣٠	ب	٣
٣١	أ	١٠	٣٢	ب	٢	٣٣	ج	٣٧٠
٣٤	ب	١٥	٣٥	ب	٦	٣٦	ج	١٢
٣٧	ب	٢	٣٨	ب	٧,٥	٣٩	د	−٣
٤٠	ب	٨	٤١	ج	٢٢	٤٢	د	π
٤٣	ب	١٠	٤٤	ج	صفر	٤٥	د	−٢
٤٦	د	$\frac{٣}{٢}\pi$	٤٧	ب	١٠	٤٨	ب	−٢
٤٩	ج	٤٠	٥٠	ب	−٢π ، ٢π	٥١	أ	٢
٥٢	أ	$\int_{٣}^{٧}$ ق(س) د س	٥٣	أ	$\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ ٢	٥٤	د	٢
٥٥	د	٦	٥٦	ب	٤	٥٧	ج	١٠
٥٨	أ	١٤	٥٩	د	٥	٦٠	ب	$\frac{١}{٣}$(لو$_{هـ}$ ٧ − لو$_{هـ}$ ٢)
٦١	ج	٦						

ورقة عمل (٢) خواص التكامل المحدود

١) قباطية : ٢٠٠٨ تجريبي

إذا كان ق (س) إقتران قابل للتكامل على الفترة [١ ، ٧] وكان $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة لهذه الفترة فإذا كان :

م ($\sigma_{ن}$ ، ق) = ٤ + $\dfrac{٣ - ٢ن}{٥ن + ١}$ فأوجد : $\int_{١}^{٧}$ (٤س + ٢ق (س)) د س

الإجابة: ٩٦ + $\dfrac{٣٦}{٥}$

٢) فلسطين : ٢٠٠٩

دون حساب التكامل بين أن : $\int_{١}^{٣}$ (س^{٢} + ٢س) د س $\geqslant$ $\int_{٣}^{١}$ ٢س د س

٣) جد الإقتران المكامل للإقتران

ق (س) = { ٤س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ + $\dfrac{١}{س}$ ، ١ < س ≤ ٢ } في [٠ ، ٢]

الإجابة: ت (س) =
{ ٢س^{٢} ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ + لو$_{هـ}$ $\lvert$ س $\rvert$ ، ١ < س ≤ ٢ }

٤) فلسطين : ٢٠٠٨

إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (٢س + ٢ق (س)) د س = ٦ وكان $\int_{١}^{٥}$ ق (س) د س = −٢ فأوجد $\int_{٥}^{٣}$ ق (س) د س

الإجابة: ١

٥) فلسطين : ٢٠٠٧ دراسات

ليكن ق (س) = { ٢س ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٦س − ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٢ }

جد الإقتران المكامل ت (س) للإقتران ق في الفترة [٠ ، ٢]

الإجابة: ت (س) =
{ س^{٢} ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٣س^{٢} − ٤س + ٢ ، ١ ≤ س ≤ ٢ }

٦) فلسطين : ٢٠٠٧

ليكن ق (س) = { ٣س^{٢} + ١ ، ٠ ≤ س < ٣ ؛ ٢س + ١٠ ، ٣ ≤ س ≤ ٧ }

جد الإقتران المكامل ت (س) للإقتران ق في مجاله

الإجابة: ت (س) =
=
{ س^{٣} + س ، ٠ ≤ س < ٣ ؛ س^{٢} + ١٠س − ٩ ، ٣ ≤ س ≤ ٧ }

٧) فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال

إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س = ٣

وكان : $\int_{٤}^{٣}$ ق (س) د س = −٢ فأوجد $\int_{١}^{٤}$ ($\sqrt{س}$ + ٢ق (س)) د س

الإجابة: $\dfrac{٤٤}{٣}$

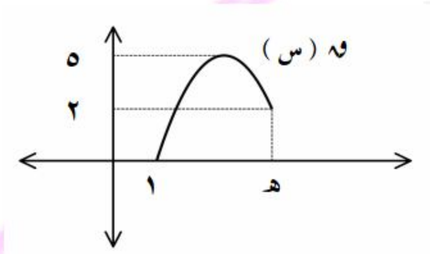
٨	جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار : $\int_{1}^{-1} \sqrt{4 - \text{س}^{2}}\ \text{د س}$	أصغر قيمة −٤ أكبر قيمة $-2\sqrt{3}$
٩	إذا كان أ = $\int_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(3)} \text{جتا}^{2}\text{س د س}$ وكان ب = $\int_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(3)} (\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتا}^{2}\text{س})\ \text{د س}$ جد أ + ب	$2 + \text{لو}_{\text{هـ}} 3 + \frac{1}{2}\text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}} 9)$
١٠	إذا كان م (س) إقتران أصلي للإقتران ق (س) المتصل ، جد $\int (2\ \text{م}(\text{س})\ \text{ق}(\text{س}))\ \text{د س}$	$\text{م}^{2}(\text{س}) + \text{جـ}$
١١	أردن : ٢٠١٧ شتوي إذا كان ق (س) = $\begin{cases} [\text{س} - 5]\ \lvert \text{س} - 1 \rvert & ،\ 0 \leq \text{س} < 2 \\ \frac{3}{\sqrt{\text{س} + 1}} & ،\ 2 \leq \text{س} \leq 4 \end{cases}$ جد : $\int_{0}^{4} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س}$	$-\frac{9}{2} + 6(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
١٢	إذا كان $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س د س} = 1$ جد $\int_{1}^{\text{هـ}} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2}\ \text{د س}$	هـ − ٢
١٣	إذا كان م $\leq \int_{0}^{\pi} \text{هـ}^{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{د س} \leq$ ن جد قيمة الثابت م ، ن دون حساب التكامل .	م = ٠ ن = π
١٤	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كان ق متصل على ح وكان $\int_{\text{س}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\ \text{د ص} = \text{س}^{2} - \text{ب س} - 3$ وكان ق (١) = صفر جد الثابتين أ ، ب	أ = ٣ أو −١ ، ب = ٢
١٥	جد قيمة : $\int_{1}^{3} \text{س ق}''(\text{س})\ \text{د س}$ علماً بأن : ق (١) = ٥ ، ق′ (١) = ٢ ، ق (٣) = ٨ ، ق′ (٣) = ٤	٧
١٦	فلسطين : ٢٠٠٨ دون حساب التكامل بين أن : $\int_{2}^{5} (3\text{س} - 2)\ \text{د س} \leq \int_{2}^{5} (2\text{س} + 3)\ \text{د س}$	

١٧	أردن : ٢٠١٦ صيفي — إذا علمت أن $\int_{١}^{هـ} س^{٤} \, لو_{هـ} س \, د س =$ $\frac{٤هـ^{٥} + ١}{٢٥}$ جد $\int_{١}^{هـ} س^{٤} \, (لو_{هـ} س)^{٢} \, د س$	$\frac{١٧هـ^{٥} - ٢}{١٢٥}$
١٨	إذا كان $\int_{م}^{ب} س \, ق(٢س + ١) \, د س = ك$ اثبت أن : $\int_{م-٢}^{ب-٢} (٢س + ٤) \, ق(٢س + ٥) \, د س = ٢ك$	
١٩	فلسطين : ٢٠٠٩ — جد الإقتران المكامل للإقتران $ق(س) = \mid س - ٣ \mid$ ، $س \in [٠ ، ٤]$	ت (س) = $٣س - \frac{س^{٢}}{٢}$ ، $٠ \leqslant س < ٣$ $\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س + ٩$ ، $٣ \leqslant س \leqslant ٤$
٢٠	أردن : ٢٠١٦ صيفي إذا كان ق (س) = $\mid هـ^{س} - ١ \mid$ ، $-١ < س \leqslant ١$ $[س - ٣]$ ، $١ < س \leqslant ٢$ جد $\int_{-١}^{٢} ق(س) \, د س$	$\frac{١}{هـ} + هـ - ١$
٢١	إذا كان $\int_{٢}^{٥} هـ \, د ق = ١٢$ وكان $ق(٢) \times هـ(٢) = ٤$ ، $ق(٥) \times هـ(٥) = ٧$ جد : $\int_{٥}^{٢} ق \, د هـ$	٩
٢٢	قباطية : ٢٠١٤ تجريبي — جد الإقتران المكامل للإقتران $ق(س) = \mid ٢س - ٦ \mid$ على الفترة $[١ ، ١٠]$	ت (س) = $-س^{٢} + ٦س - ٥$ ، $١ \leqslant س < ٣$ $س^{٢} - ٦س + ١٣$ ، $٣ \leqslant س \leqslant ١٠$
٢٣	فلسطين : ٢٠٠٩ — إذا كان $\int_{١}^{٢} ق(س) \, د س = ٣$ ، $ق(١) = ٥$ ، $ق(٢) = ٨$ جد $\int_{١}^{٢} س \, ق'(س) \, د س =$:	٨

٢٤	جد الإقتران المكامل للإقتران ق(س) = | ٢س − ٤ | على الفترة [٠ ، ٤]	ت(س) = $\begin{cases} -\text{س}^{٢} + ٤\text{س} & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٨ & ، \quad ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$
٢٥	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كان ١ ≤ ق(س) ≤ ٥ ∀ س ∈ [١ ، ٣] بين أن : $٦ \leqslant \int_{١}^{٣} (\text{ق(س)}(\text{ق(س)} + ٢))\ \text{د س} \leqslant ١٤$	
٢٦	إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} - ٤ & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} < ٢ \\ ٦\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} & ، \quad ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$ جد الإقتران المكامل ت(س) للإقتران ق(س) على الفترة [٠ ، ٤]	ت(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤\text{س} & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ٤٤ & ، \quad ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$
٢٧	رام الله والبيرة : ٢٠١٥ تجريبي إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٦\text{س} & ، \quad ١ \leqslant \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} + ٥ & ، \quad ٣ \leqslant \text{س} \leqslant ٥ \end{cases}$ جد الإقتران المكامل ت(س) للإقتران ق(س) على الفترة [١ ، ٥] .	ت(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٣ & ، \quad ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٣ \\ \text{س}^{٢} + ٥\text{س} & ، \quad ٣ < \text{س} \leqslant ٥ \end{cases}$
٢٨	إذا كان $\int_{-١}^{٢} (٣\text{ق(س)} + ٢\text{س} - ٤)\ \text{د س} = ٣$ ، $\int_{٣}^{١} (\text{ق(س} + ١) - ٣\text{س}^{٢})\ \text{د س} = ٢٧$ جد $\int_{-١}^{٤} \text{ق(س)}\ \text{د س}$	٣
٢٩	فلسطين : ٢٠١١ إذا كان علمت أن منحنى ق′(س) يقع فوق محور السينات في الفترة [−١ ، ٥] أثبت أن : $\int_{١}^{٠} (\text{ق}'\text{(س)} + \text{هـ}^{-\text{س}})\ \text{د س} < \text{صفر}$	
٣٠	إذا كان $\int_{٠}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{د س} = ١٢$ جد $\int_{١}^{٣} \text{س ق(س}^{٢} - ١)\ \text{د س}$	٦
٣١	جنين : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان $\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١}\ \text{د س} = \text{أ}$ أثبت أن : $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}}\ \text{د س} = \frac{١٢ - ٢\text{أ}}{٣}$	
٣٢	إذا كان ق(١) = −٢ ، ق(٨) = ١٢ جد : $\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\ \text{ق}'(\text{س}^{٣})\ \text{د س}$	$\frac{١٤}{٣}$
٣٣	أثبت أن : $\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{م}} (١ - \text{س})^{\text{ن}}\ \text{د س} = \int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}} (١ - \text{س})^{\text{م}}\ \text{د س}$	

٣٤	رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان ق(١) = ٤ ، ق(−١) = ٣ ، $\int_{-1}^{1}$ ق(س) د س = ٢٠ جد $\int_{2}^{3}$ ٨س ق′(٥ − ٢س) د س	٣٦
٣٥	إذا كان $\int_{2}^{4}$ ق(س) د س − $\int_{2}^{1}$ ق(س) د س = $\int_{3}^{أ}$ ق(س − ٢) د س ، جد قيمة الثابت أ	أ = ٦
٣٦	إذا كان ق(١) = −٢ ، ق′(١) = ٣ ، ق(٤) = ٥ ، ق′(٤) = ١١ جد $\int_{-1}^{2}$ س^{3} ق″(س^{2}) د س	١٧
٣٧	إذا كان م(س) إقتران أصلي للإقتران المتصل ق(س) حيث م(١) = ٣ ، م(−١) = −١ ، $\int_{-1}^{1}$ س ق(س) د س = ٧ جد $\int_{0}^{2}$ س ق(س − ١) د س	١١
٣٨	أردن : ٢٠١٦ شتوي إذا علمت أن : م ≤ $\int_{1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2س^{2}+7}}$ د س ≤ ك جد قيمة الثابتين م ، ك بدون حساب التكامل .	م = $\frac{2}{5}$ ك = $\frac{2}{3}$
٣٩	فلسطين : ٢٠١٢ إكمال إذا كان ق ، ك إقترانين قابلين للتكامل على ح وكان ق(س) ≥ ك(س) على الفترة [١ ، ٣] أثبت أن : $\int_{4}^{2}$ ق(س − ١) د س + $\int_{1}^{3}$ ك(٤ − س) د س ≤ ٠	
٤٠	إذا كان ق(١) = −٢ ، ق(٣) = ٩ وكان $\int_{1}^{3}$ ق(س) د س = ١١ جد : $\int_{1}^{3}$ س ق′(س) د س	١٨
٤١	إذا كان ق(−١) = ٢ ، ق(٧) = ١١ جد $\int_{0}^{2}$ س^{2} ق′(س^{3} − ١) د س	٣
٤٢	أردن : ٢٠٠٩ صيفي إذا كان $\int_{1}^{2}$ ق(س) د س = ١٠ وكان ق(٢) = ٣ ، ق(١) = −١ جد : $\int_{0}^{1}$ س^{5} ق′(س^{3} + ١) د س	− $\frac{7}{3}$
٤٣	إذا كان ق′(٠) = ٣ ، ق′(٤) = ١٧ جد $\int_{2}^{3}$ (٢س − ٣) ق″(٢س^{2} − ٦س + ٤) د س	٧
٤٤	دون حساب التكامل بين أن : $\int_{3}^{4}\frac{4س-6}{2-س}$ د س < صفر	

٤٥	إذا علمت أن : ∫ من ١ إلى ٣ (أس + ١) / (س² − س − ٢) دس = لوهـ ٢ جد قيمة الثابت أ	أ = ٤
٤٦	إذا كان ق′(س) = جا²س / س وكان ق($\frac{\pi}{2}$) = ٤ جد ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ ق(س) دس	$\frac{7\pi}{4}$
٤٧	إذا كان ق(١) = ٧ ، ق′(١) = ٦ ، ق(٣) = ٢ ، ق′(٣) = ١ جد ∫ من ١ إلى ٣ س ق″(س) دس	٢
٤٨	أثبت أن : ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ جا^ن س دس = ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ جتا^ن س دس ، ن ∈ ص⁺	
٤٩	شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان ق(٠) = ٣ ، ق′(٠) = −٥ ، ق″(٠) = ٢ ، ق(١) = ٧ ، ق′(١) = ٤ ، ق″(١) = −١ أوجد : ∫ من ٠ إلى ١ س (ق(س) ق″(س) + (ق′(س))²) دس	٨
٥٠	إذا كان ∫ من ٠ إلى ٣ ق(س) دس = ٤ ، ∫ من ٠ إلى ٣ (أ ق(٣ − س) + ٦س + ١) دس = ٤٢ جد قيمة أ	أ = ٣
٥١	جد قيمة أ إذا علمت أن ∫ من ٠ إلى ٨ | س − أ | دس = ٢٠ ، أ ∈ [٠ ، ٨]	أ = ٦ ، ٢
٥٢	أردن : ٢٠١٧ صيفي إذا كان م(س) = س هـ^س − هـ^س إقتران أصلي للإقتران ق(س) = س هـ^س وكان ∫ من ٠ إلى ٢ (٤ ق(س) + هـ²) دس + ∫ من ٤ إلى هـ² أ / (هـ − ٢) دس = ٢٨ جد قيمة الثابت أ	أ = ٦ (٢ − هـ)
٥٣	قباطية : ٢٠٠٨ تجريبي إذا كان ق(س) = { ٢س + ١٦ ، −١ ≤ س < ٠ ؛ ظاس ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{3}$ } جد الإقتران المكامل ت(س) للإقتران ق(س) على [−١ ، $\frac{\pi}{3}$]	ت(س) = { س² + ١٦س + ١٥ ، −١ ≤ س ≤ ٠ ؛ ١٥ − لوهـ | جتاس | ، ٠ < س ≤ $\frac{\pi}{3}$ }
٥٤	فلسطين : ٢٠١٢ إذا كان ١ / ق(س) < ٠ ∀ س ∈ [١ ، ٩] بين أن : ∫ من ٣ إلى ١ ٢س ق(س²) دس > ٠	

٥٥	إذا كان ق $(-٣) = ٢$ ، ق $(١) = ٠$ ، ق $(-١) = ١$ جد $\int_{-١}^{٢}$ ٦ ق$'$ (| ٢س | − ٣) د س		−٩
٥٦	إذا كان $\int_{أ}^{ب}$ س ق (٢س + ١) د س = ن اثبت أن : $\int_{أ-٢}^{ب-٢}$ (٢س + ٤) ق (٢س + ٥) د س = ٢ ن		
٥٧	أثبت أن : ن $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ (ظا$^{ن-١}$ (س) + ظا$^{ن+١}$ (س)) د س = ١		
٥٨	إذا كان $\int_{٠}^{ن}$ [$\frac{س}{ن}$] د س = ٣٠ ، ن ∈ ص$^{+}$ جد قيمة ن		ن = ١٠
٥٩	فلسطين : ٢٠١٥ الشكل المجاور يبين منحنى ق (س) ، بالإعتماد على الشكل المجاور ماهي أكبر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{٠}^{١}$ هـ^{س} ق (هـ^{س}) د س		٥ (هـ − ١)

ورقة عمل (٣) طرق التكامل (تكامل محدود)

رقم	التكامل	الإجابة
١	$\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} (جا^{٢}س + جتاس)\ د\ س$	$\frac{٢}{٣}$
٢	شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي $\int_{٣}^{٥} \frac{س + ٥}{س^{٢} - س}\ د\ س$	$-٥لو_{هـ}\left(\frac{٥}{٣}\right) + ٦لو_{هـ}\ ٢$
٣	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} س\ جتاس\ د\ س$	$\frac{\sqrt{٣}\,\pi}{٦} - \frac{١}{٢}$
٤	أردن : ٢٠١٦ شتوي $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} قا^{٤}س\ لو_{هـ}\ ظاس\ د\ س$	$٦\sqrt{٣}\ لو_{هـ}(\sqrt{٣}) - ٤\sqrt{٣} + \frac{١٠}{٣}$
٥	$\int_{٣}^{٤} \frac{٢س - ١}{(س - ٢)(س - ٥)}\ د\ س$	$٤\ لو_{هـ}\ ٢$
٦	$\int_{-١}^{٠} س(س + ١)^{٥}\ د\ س$	$-\frac{١}{٤٢}$
٧	أردن : ٢٠١٠ شتوي $\int_{١}^{٨} \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٤}} + ٤س + ٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}\ د\ س$	$٣\ لو_{هـ}\ \frac{٦}{٥}$
٨	$\int_{١}^{٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}}{\frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س}\ د\ س$	$لو_{هـ}\left(\frac{٩}{١٦}\right)$
٩	$\int_{٠}^{١} \frac{٣\ د\ س}{(س^{٢} + ٢س + ١)^{٣}}$	$\frac{٩٣}{١٦٠}$
١٠	فلسطين : ٢٠١٩ $\int_{١}^{هـ^{٢}} ٢س\ لو_{هـ}\ س\ د\ س$	$٢هـ^{٢} - \frac{هـ^{٤}}{٢} + \frac{١}{٢}$

١١	أردن : ٢٠٠٨ صيفي $\int_{1}^{هـ} \frac{٢}{س\,(لو_{هـ} س - ٢)\,(لو_{هـ} س - ٣)}\, د\, س$	$لو_{هـ} \frac{١٦}{٩}$
١٢	نابلس : ٢٠١٩ تجريبي $\int_{1}^{٢} \frac{١}{س^{٢}\sqrt{س^{٢} + ١}}\, د\, س$	$\frac{-\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}{٢}$
١٣	أردن : ٢٠٠٨ شتوي $\int_{0}^{\pi} (١ + جا٢س)\, جتا^{٢}س\, د\, س$	$\frac{\pi}{٢}$
١٤	أردن : ٢٠٠٩ شتوي $\int_{1}^{٤} \frac{٢}{س - ٤\sqrt{س} + ٣}\, د\, س$	$-٦\, لو_{هـ} ٣$
١٥	أردن : ٢٠١١ شتوي $\int_{1}^{٤} \frac{\lvert س - ١ \rvert}{س^{٢} - ٥س + ٦}\, د\, س$	$-٣\, لو_{هـ} (٢)$
١٦	أردن : ٢٠١٦ شتوي $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} \sqrt{جتا^{٢}س + \frac{١}{٢} جا٢س\, جتاس}\, د\, س$	$\frac{٢}{٣}\left(٤\sqrt{٢} - \left(١ + \sqrt{\left(١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٣}}\right)\right)$
١٧	$\int_{\frac{\pi}{٢}}^{0} جتاس\, [\, جاس\,]\, د\, س$	صفر
١٨	أثبت أن : $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س - ١)^{ن}}{س^{ن+٢}}\, د\, س = \begin{cases} \frac{١}{ن + ١} & \text{، ن عدد زوجي} \\ \frac{-١}{ن + ١} & \text{، ن عدد فردي} \end{cases}$	
١٩	أردن : ٢٠٠٠ $\int_{-٣}^{٣} \frac{٧}{س^{٢} + ٤س + ٤}\, د\, س$	$\frac{١٤}{١٥}$

٢٠	أردن : ٢٠٠٠ إكمال $\int_{0}^{2} \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}\ \text{د س}$	١
٢١	أردن : ٢٠٠٢ $\int_{1}^{\text{هـ}} (\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س})^2\ \text{د س}$	هـ − ٢
٢٢	أردن : ٢٠٠٨ شتوي $\int_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(2)} \text{هـ}^{\text{س}} (9 - 4\ \text{هـ}^{\text{س}})\ \text{د س}$	٣
٢٣	أردن : ٢٠١٠ صيفي $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{د س}}{1 - \text{جتاس}}\ \text{د س}$	$1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$
٢٤	$\int_{3}^{4} \frac{4}{\text{س}^2 - 4}\ \text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}}\ 5 - \text{لو}_{\text{هـ}}\ 3$
٢٥	أردن : ٢٠١١ صيفي $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{جا}^2\text{س جتا}^2\text{س}\ \text{د س}$	$\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}\right)$
٢٦	أردن : ٢٠١٢ شتوي $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1 + \text{س})^5}{\text{س}^7}\ \text{د س}$	$\frac{665}{6}$
٢٧	أردن : ٢٠١٢ صيفي $\int_{-1}^{4} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 5}}\ \text{د س}$	$\frac{8}{3}$
٢٨	أردن : ٢٠١٣ شتوي $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}2\text{س جتاس}\ \text{د س}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$

٢٩	أردن : ٢٠١٤ شتوي $\int_{٠}^{٢} \left(\text{س}^{٢} - \lvert \text{س} - ١ \rvert \right) \, \text{د س}$	$\frac{٥}{٣}$
٣٠	أردن : ٢٠١٤ صيفي $\int_{٠}^{١} \frac{-\text{س}}{\text{س} + ١ - \sqrt{\text{س} + ١}} \, \text{د س}$	$١ - ٢\sqrt{٢}$
٣١	أردن : ٢٠١٥ شتوي $\int_{٢}^{٥} \text{هـ}^{\left(١ + \sqrt{\text{س} - ١}\right)} \, \text{د س}$	$٢\text{هـ}^{٣}$
٣٢	أردن : ٢٠١٥ صيفي $\int_{٠}^{٤} \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{\left(\text{س}^{٢} + ٩\right)^{٣}}} \, \text{د س}$	$\frac{٤}{٥}$
٣٣	أردن : ٢٠١٧ شتوي $\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٤} \left(\frac{٢ - \text{س}}{\text{س}^{٢}} \right)^{٣}} \, \text{د س}$	$\frac{١٨}{٣٥}$
٣٤	أردن : ٢٠١٧ صيفي $\int_{١}^{٣} \frac{\left(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩\right)^{\frac{٧}{٢}}}{\text{س}^{٩}} \, \text{د س}$	$\frac{٣٢}{٣}$
٣٥	أردن : ٢٠١٧ صيفي $\int_{٠}^{٢} \left\lvert \text{هـ}^{(٢\text{س} - ١)} - \text{هـ} \right\rvert \, \text{د س}$	$-\text{هـ} + \frac{١}{٢\text{هـ}} + \frac{\text{هـ}^{٣}}{٢}$
٣٦	أردن : ٢٠١٧ صيفي $\int_{٢}^{٦} \left(\left[\frac{١}{٣}\text{س} \right] - ٢ \right) \, \text{د س}$	-٥
٣٧	أردن : ٢٠١٨ صيفي $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣} \sqrt{\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}} \right) \, \text{د س}$	$-\frac{١}{٢}\left(\sqrt{٢} + \sqrt{٣}\right)$

٣٨	$\int_{٠}^{١} \frac{٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{د س}$	$\text{هـ} - ٢$
٣٩	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتاس}\,(٢ - ٢\text{جتا}٢\text{س})^{٤}\,\text{د س}$	$\frac{٨\sqrt{٢}}{٩}$
٤٠	$\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}\,\text{د س}$	$\frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢} + \frac{١}{٢}$
٤١	أردن : ٢٠٢٠ $\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{د س}$	$\text{هـ}^{٢} + ١$
٤٢	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١ + \text{جا}٢\text{س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\,\text{د س}$	٢
٤٣	$\int_{٣}^{٤} \frac{٤}{\text{س}^{٢} - ٤}\,\text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣$
٤٤	أردن : ٢٠٢٠ تكميلي $\int_{٢}^{٣} \frac{٤}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}\,\text{د س}$	$\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣$

لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

٥ – ٥ تطبيقات التكامل المحدود

ملخص الـدرس

أولاً : المساحات

الحالة الأولى : مساحة منطقة محصورة بين منحنى إقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١)

إذا كان ق (س) إقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران ق (س) ومحور السينات في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة : م = $\int_{أ}^{ب}$ | ق (س) | د س

الحالة الثانية : مساحة منطقة محصورة بين منحنيين أو أكثر :

نظرية (٢)

إذا كان ق (س) ، هـ (س) إقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق (س) ، هـ (س) في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة : م = $\int_{أ}^{ب}$ | ق (س) – هـ (س) | د س

ثانياً : الحجوم الدورانية

الحالة الأولى : حجم الجسم الناتج من دوران منحنى حول محور السينات في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١)

إذا كان ق (س) : [أ ، ب] ⟵ ح وكان الإقتران ق^{٢} (س) قابلاً للتكامل على الفترة [أ ، ب] فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران ق (س) و محور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالقاعدة : ح = $\pi \int_{أ}^{ب}$ ق^{٢} (س) د س

الحالة الثانية :

حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيي إقترانين حول محور السينات في الفترة [ﺍ ، ب]

نظرية (٢)

إذا كان $ق^{٢}$ (س) ، $هـ^{٢}$ (س) إقترانين قابلين للتكامل في الفترة [ﺍ ، ب] وكان منحنيي ق (س) ، هـ (س) يقعان على جهة واحدة من محور السينات فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بينهما دورة كاملة حول محور السينات

يعطى بالقاعدة : $ح = \pi \int_{ﺍ}^{ب} |\ هـ^{٢}(س) - ق^{٢}(س)\ |\ د\ س$

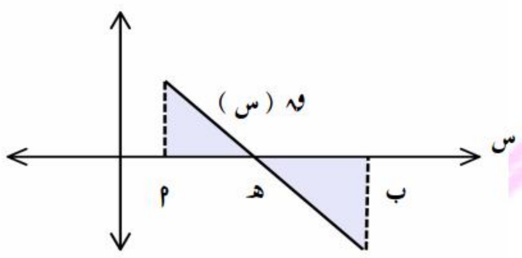
لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

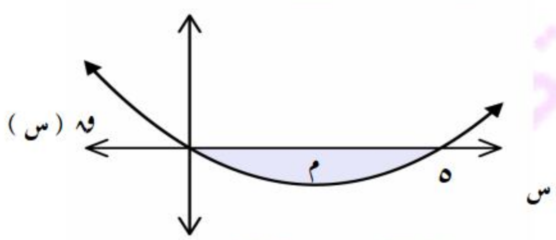
ورقة عمل (١) تطبيقات التكامل المحدود

إختر الإجابة الصحيحة

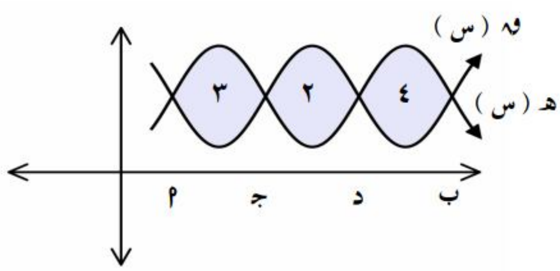
١) في الشكل المجاور التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الإقتران ق (س) و محور السينات والمستقيمين س = م ، س = ب هو :

م) $\int_{م}^{ب}$ ق (س) د س	ب) $\int_{م}^{ب}$ – ق (س) د س	
جـ) $\int_{م}^{ب}$ | ق (س) | د س	د) $\int_{م}^{ب}$ ٢ | ق (س) | د س	

٢) في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الإقتران ق إذا كانت المساحة م المحصورة بين منحنى ق و محور السينات تساوي ٨ وحدات مربعة فإن $\int_{٠}^{٥}$ (١ – ق(س)) د س يساوي

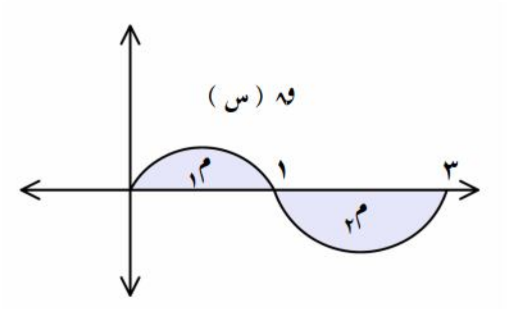
م) –٣	ب) ٣	
جـ) –١٣	د) ١٣	

٣) إذا كان ق ، هـ إقترانين متصلين في الفترة [م ، ب] وكانت مساحة المناطق بين الإقترانات كما هو مبين في الشكل المجاور فإن $\int_{جـ}^{ب}$ (ق (س) – هـ (س)) د س يساوي :

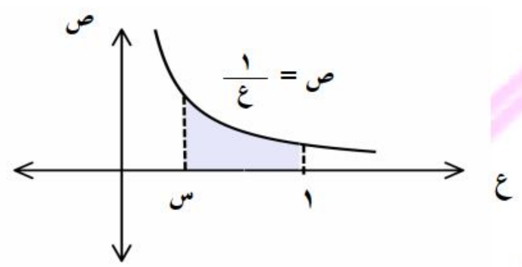
م) ٦	ب) –٢	
جـ) ٢	د) – ٥	

٤ جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي

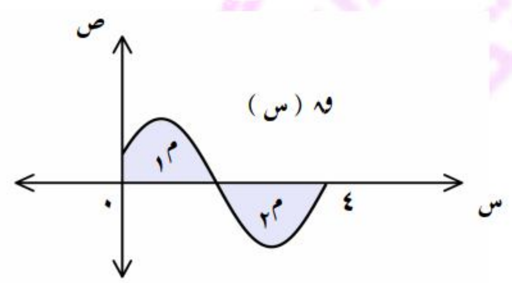
في الشكل المجاور إذا علمت أن $م_1$ = وحدة مربعة ، $م_2$ = ٣ وحدات مربعة فإن $\int_{1}^{2} س\ ق(س^2 - ١)\ د س$ يساوي :

(أ) ٤	(ب) −٤	
(ج) −١	(د) −٢	

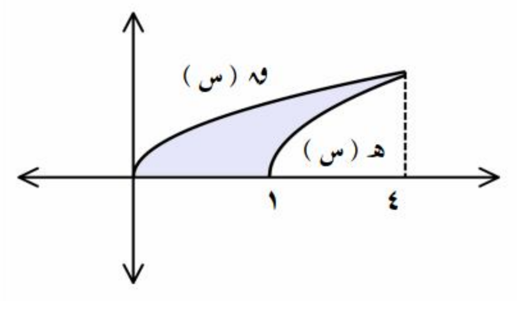
٥ مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور = :

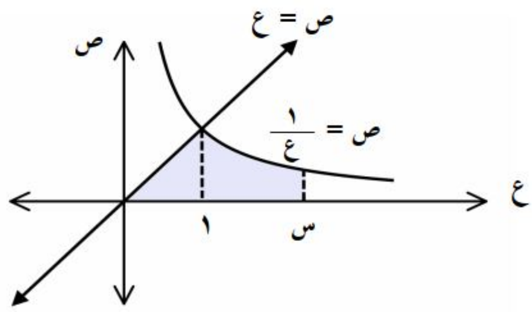
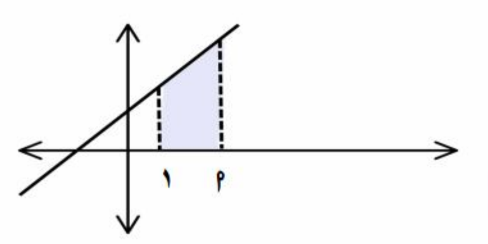
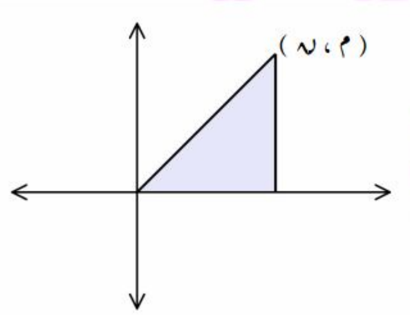
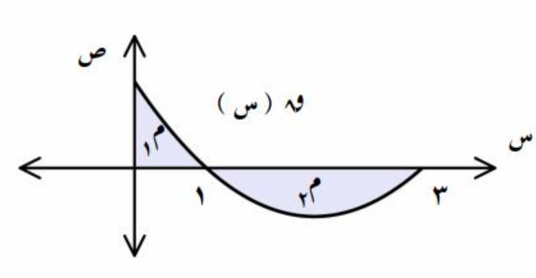
(أ) − $لو_{هـ}$ س	(ب) $لو_{هـ}$ س	
(ج) $هـ^{س}$	(د) − $هـ^{س}$	

٦ في الشكل المجاور منحنى ق (س) في الفترة [٠ ، ٤] فإذا كانت مساحة $م_1$ = ٨ وحدات مربعة وكانت مساحة $م_2$ = ٦ وحدات مربعة فإن $\int_{٠}^{٤} ق(س)\ د س$ يساوي :

(أ) ٢	(ب) ١٤	
(ج) ١٠	(د) لا شيء مما سبق	

٧ في الشكل المجاور مساحة المنطقة المظللة = :

(أ) $\int_{٠}^{٤} (\ ق(س) - هـ(س)\ )\ د س$	
(ب) $\int_{١}^{٤} (\ ق(س) - هـ(س)\ )\ د س$	
(ج) $\int_{٠}^{٤} ق(س)\ د س - \int_{١}^{٤} هـ(س)\ د س$	
(د) $\int_{٠}^{١} (\ ق(س) - هـ(س)\ )\ د س$	

٨ **أردن : ٢٠٠٩ صيفي** مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور = :		
(أ) $\frac{١}{٢} - $ لو$_{هـ}$ س	(ب) $\frac{١}{٢} + $ لو$_{هـ}$ س	
(ج) ١ + لو$_{هـ}$ س	(د) −١ + لو$_{هـ}$ س	
٩ إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة في الشكل المقابل = ١٤ وحدة مربعة ، ق (س) = ٢س + ٣ فإن قيمة أ = :		
(أ) ٣	(ب) ٢	
(ج) ٥	(د) ٦	
١٠ **جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي** بالإعتماد على الشكل المجاور إذا دارت المنطقة المظللة حول محور السينات دورة كاملة فإن حجم الجسم الناتج يساوي		
(أ) $\frac{\pi}{٣}$ ق م^{٣}	(ب) $\frac{\pi}{٣}$ ق^{٣} م	
(ج) $\frac{\pi}{٣}$ ق^{٢} م	(د) $\frac{\pi}{٣}$ ق م^{٢}	
١١ في الشكل المجاور إذا علمت أن مساحة م$_{٢}$ تساوي ثلاثة أمثال مساحة م$_{١}$ وأن $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) د س = −٦ فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) د س يساوي :		
(أ) −٢	(ب) −٤	
(ج) −٣	(د) −٩	

١٢ جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي

إذا دارت المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ و ومحور السينات في الفترة [١ ، هـ] دورة كاملة حول محور السينات فما حجم الجسم الناتج من الدوران ؟

أ π وحدة حجم	ب ٢ π وحدة حجم	ج ٣ π وحدة حجم	د ٤ π وحدة حجم

١٣ طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

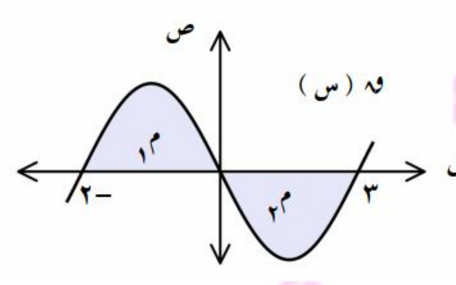
ما حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٣س ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢] دورة كاملة حول محور السينات ؟

أ ٢٤ π وحدة حجم	ب ٦ π وحدة حجم	ج ٢٤ وحدة حجم	د ٦ وحدة حجم

١٤ بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

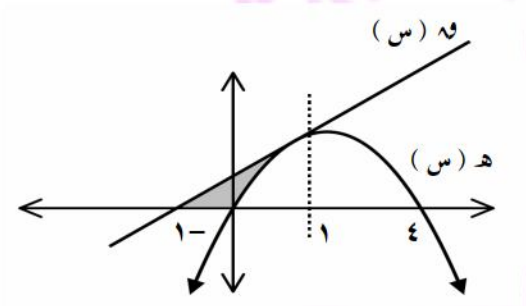
معتمداً على الشكل المجاور إذا كان $\int_{-٢}^{٣} |ق(س)|\ د س = ٨$

وكان م٢ – م١ = ٦ وحدات مربعة فإن قيمة م٢ =

أ ٢	ب -٢	
ج ٧	د ٨	

١٥ فلسطين : ٢٠١٧

مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور نعبر عنها بالتكامل :

أ $\int_{-١}^{١} (ق(س) - هـ(س))\ د س$	
ب $\int_{-١}^{٠} ق(س)\ د س - \int_{٠}^{١} هـ(س)\ د س$	
ج $٢\int_{-١}^{٠} (ق(س) - هـ(س))\ د س$	
د $\int_{-١}^{١} ق(س)\ د س - \int_{٠}^{١} هـ(س)\ د س$	

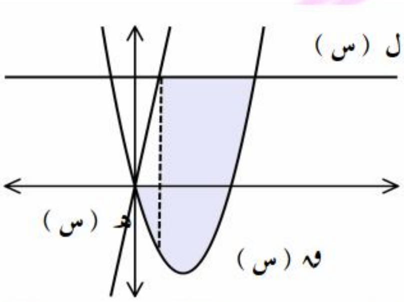
إجابات الإختيار من متعدد (تطبيقات التكامل المحدود)

١	ج	$\int_{أ}^{ب} \lvert ق(س) \rvert \, دس$	٢	د	١٣	٣	ب	٢–
٤	ج	١–	٥	أ	– لو$_{هـ}$ س	٦	أ	٢
٧	ج	$\int_{0}^{4} ق(س)\, دس - \int_{1}^{4} هـ(س)\, دس$	٨	ب	$\frac{1}{2}$ + لو$_{هـ}$ س	٩	أ	٣
١٠	ج	$\frac{\pi}{3}$ نق^{2} م	١١	د	٩–	١٢	د	٤ π وحدة حجم
١٣	أ	٢٤ π وحدة حجم	١٤	ج	٧	١٥	د	$\int_{-1}^{1} ق(س)\, دس - \int_{0}^{1} هـ(س)\, دس$

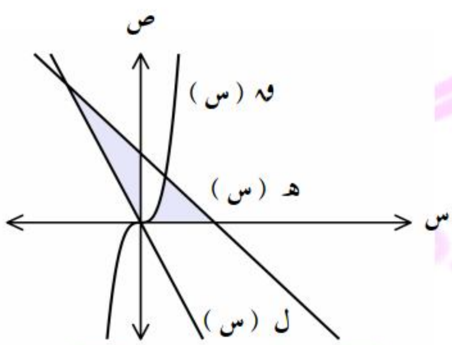
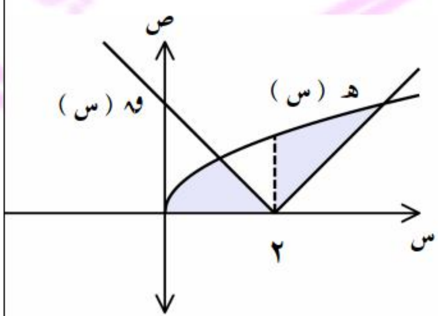
لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

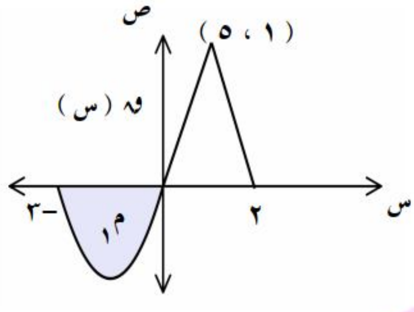
مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

ورقة عمل (٢) تطبيقات التكامل المحدود (المساحات)

١	فلسطين : ٢٠١١ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = − س^{٣} و هـ (س) = س والمستقيم ص = ٨	٤٤ وحدة مربعة
٢	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = س^{٣} + ١ ومحور السينات في الفترة [−٢ ، ٢]	$\frac{١٩}{٢}$ وحدة مربعة
٣	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\sqrt{س}$ ، س ⩾ ٠ والمستقيم ص = س − ٢ ومحور السينات	[redacted]
٤	جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق (س) = س^{٢} − ٤س ، هـ (س) = ٥س ، ل (س) = ٥ 	$\frac{٨٥}{٣}$ وحدة مربعة
٥	فلسطين : ٢٠٠٧ إكمال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = ٦ − ٣س − س^{٢} ، هـ (س) = ٣ − س	$\frac{٣٢}{٣}$
٦	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين ص = جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠ ، ١) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)	١ − $\frac{\pi}{٤}$ وحدة مربعة
٧	فلسطين : ٢٠١٤ إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص = $\sqrt{٢ - س}$ ، ص = − س ومحور السينات	$\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة
٨	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = جاس − $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة [−$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]	$\sqrt{٣}$ + $\frac{\pi}{٦}$ وحدة مربعة
٩	فلسطين : ٢٠١٠ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٣} ، هـ (س) = س	٢ وحدة مربعة
١٠	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ١٠ − س^{٢} و منحنى ل (س) = | س − ٢ | ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول .	$\frac{٣٧}{٢}$ وحدة مربعة

١١	فلسطين : ٢٠٠٧ دراسات — جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = س^{٢} و هـ (س) = ٢ − س ومحور السينات والواقعة في الربع الأول .	$\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة
١٢	فلسطين : ٢٠١٢ — إحسب المساحة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بمنحنيات الإقترانات ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، ص = ١ ، ص = ٩	٣٤ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة
١٣	فلسطين : ٢٠٠٩ — إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحيات الإقترانات ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، هـ (س) = ٢س − ٤ ومحور السينات	$\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة
١٤	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = س^{٣} − س ومحور السينات	$\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة
١٥	فلسطين : ٢٠٠٧ — جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ص$_{١}$ = س^{٢} والمستقيم ص$_{٢}$ = ٤س	$\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة
١٦	فلسطين : ٢٠١١ إكمال — جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = هـ^{س} والمستقيم ص = هـ ومحور الصادات	١ وحدة مربعة
١٧	إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص − س = ٦ ، ص = س^{٣} و ٢ص + س = ٠	٢٢ وحدة مربعة
١٨	جد قيمة م بحيث المستقيم س = م يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى س = $\sqrt{ص}$ والمستقيم س = ٢ ومحور السينات إلى قسمين	م = $\sqrt[٣]{٤}$
١٩	فلسطين : ٢٠١٤ إكمال — جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = هـ^{س} و منحنى ل (س) = هـ$^{-س}$ والمستقيم ص = ٢	(٤لو$_{هـ}$ ٢ − ٢) وحدة مربعة
٢٠	فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال — إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص$_{١}$ = س^{٣} ، ص$_{٢}$ = س ، ص$_{٣}$ = ٨	٢٠ وحدة مربعة
٢١	فلسطين : ٢٠١٥ — جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٢ − س^{٢} و منحنى ل (س) = | س |	$\frac{٧}{٣}$ وحدة مربعة
٢٢	أثبت باستخدام التكامل أن مساحة المثلث الذي إرتفاعه م وطول قاعدته ب هو م = $\frac{١}{٢}$ م × ب	

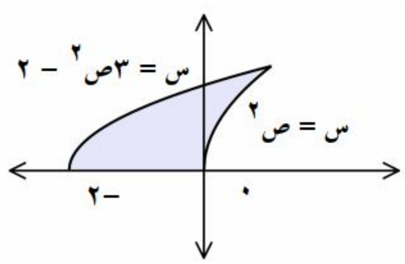
٢٣	فلسطين : ٢٠٠٨ إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ص = ١ و ومنحنى الإقتران ق (س) = { ٢س^{٢} + ١ ، ٠ ⩽ س < ١ ؛ − س + ٤ ، ١ ⩽ س ⩽ ٤	$\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة
٢٤	فلسطين : ٢٠١٦ إكمال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = (س − ٢)^{٢} والمستقيم ص = ٤ − س ومحور السينات	$\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة
٢٥	جد مساحة المنطقتين المظللتين في الشكل المجاور حيث : ق (س) = ٢س^{٣} ، هـ (س) = ٣ − س ، ل (س) = − ٢ س 	٧ وحدات مربعة
٢٦	فلسطين : ٢٠١٠ إكمال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = س^{٢} − ١ ، هـ (س) = ١ − س^{٢}	$\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة
٢٧	جد مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيات ق (س) = ٤ − س^{٢} ، هـ (س) = س + ٢	$\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة
٢٨	فلسطين : ٢٠٠٩ إكمال جد مساحة المنطقة المحدودة بالمحورين الإحداثيين ومنحنى كل من الإقترانات ق (س) = س^{٢} + ١ و هـ (س) = ٣ − س	$\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة
٢٩	جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق (س) = | س − ٢ | ، هـ (س) = √س 	$\frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$ وحدة مربعة
٣٠	جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين ق (س) = ٨ − ٢س^{٢} ، هـ (س) = س^{٢} − ٤	٣٢ وحدة مربعة
٣١	فلسطين : ٢٠١٥ إكمال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٤س − س^{٢} والمستقيم ص = ٤ − س	[redacted]

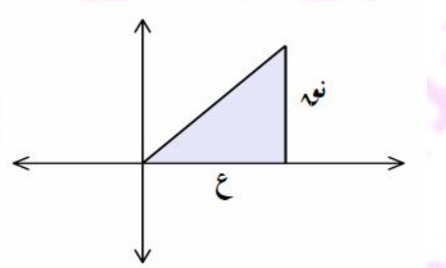
٣٢	إذا كان المستقيم ص = ا س يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى ص = ٢س − $س^{٢}$ ومحور السينات إلى قسمين متساويين ، جد قيمة الثابت ا حيث س ، ا > ٠		ا = ٢ − $\sqrt[٣]{٤}$
٣٣	الشكل المجاور يمثل منحنى ق على الفترة [−٣ ، ٢] ، مساحة المنطقة $م_{١}$ = ٢ وحدة فإذا كان $\int_{٠}^{٢}$ (٢ ق (س) + ٥) د س = −١٧ جد $\int_{-٣}^{٠} \frac{ق(س)}{٣}$ د س		−٢
٣٤	الشكل المجاور يمثل منحنى ق ، مساحة المنطقة $م_{١}$ = ٣ وحدات ، $م_{٢}$ = ٤ وحدات جد : $\int_{٤}^{٠}$ (٣ ق (س) − ٧) د س		٣١
٣٤	جنين : ٢٠١٩ تجريبي — جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران ق (س) = $لو_{هـ}$ س والمستقيمان ص + س = ١ ، ص = ١		(هـ − $\frac{٣}{٢}$) وحدة مربعة

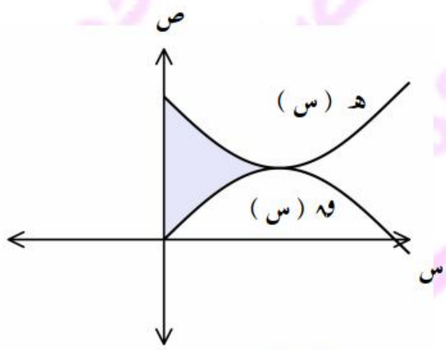
لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

ورقة عمل (٣) تطبيقات التكامل المحدود (الحجوم الدورانية)

١	فلسطين : ٢٠١٠ جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بمنحنى ق (س) = $\sqrt{\text{جا}٢\text{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = $\frac{\pi}{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات	π وحدة مكعبة
٢	جد باستخدام التكامل حجم كرة طول نصف قطرها ٦سم	٢٨٨ π سم^٣
٣	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحنى ص = هـ$^{٢\text{س}}$ والمستقسم ص = هـ^٢ دورة كاملة حول محور السينات	($\frac{٣}{٤}$ هـ^٤ + $\frac{١}{٤}$) π وحدة مكعبة
٤	فلسطين : ٢٠١١ إكمال مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة ٦سم ، ٨سم دار المثلث دورة كاملة حول ضلع القائمة الأكبر ما حجم المجسم الناتج عن الدوران ؟	٩٦ π وحدة مكعبة
٥	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنى كل من ق (س) = جتاس ، هـ (س) = جاس دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{\pi}{٢}$ وحدة مكعبة
٦	جد حجم الجسم الناتج عن المنطقة المظللة في الشكل المجاور دورة كاملة حول محور السينات  	π وحدة مكعبة
٧	فلسطين : ٢٠٠٨ جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنى كل من $\frac{\text{س}^٢}{٦}$ + ص^٢ = ١ ، ص^٢ = $\frac{\text{س}}{٦}$ دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{١١}{٩}$ π وحدة مكعبة

٨	قباطية : ٢٠١٤ تجريبي جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}}$ والمستقيم س = $\text{هـ}^{٢}$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	$\text{هـ}^{٢}$ + ١ وحدة مكعبة
٩	فلسطين : ٢٠١١ جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}}$ والمستقيم س = هـ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	π وحدة مكعبة
١٠	إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\sqrt{\text{ﻡ س}}$ و منحنى هـ (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ﻡ}}$ ، ﻡ ≠ ٠ دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{١٢}{٥}\pi$ وحدة مكعبة جد قية الثابت ﻡ	ﻡ = ٢
١١	فلسطين : ٢٠١٤ إستخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم المخروط الدائري القائم الذي نصف قطره نق وارتفاعه ع يساوي $\frac{١}{٣}\pi$ $\text{نق}^{٢}$ع  	
١٢	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ٯ (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ و هـ (س) = س – ١ دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{١}{٦}\pi$ وحدة مكعبة
١٣	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ومنحنى ص = س والمستقيم ص = هـ ومحور السينات دورة كاملة حول السينات	$\left(\frac{٢\text{هـ}^{٣} - ٨}{٣}\right)\pi$ وحدة مكعبة
١٤	فلسطين : ٢٠١٢ جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = $\sqrt{٢\text{س} - ٤}$ والمستقيم س = ٥ ، ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات	٩ π وحدة مكعبة
١٥	قباطية : ٢٠٠٧ تجريبي إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ٯ (س) = ﻡس و منحنى هـ (س) = $\text{س}^{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{٦٤}{١٥}\pi$ وحدة حجم جد قيمة ﻡ حيث ﻡ > ٠	ﻡ = ٢

١٦	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٢س − س^{٢} و منحنى هـ (س) = س^{٢} دورة كاملة حول محور السينات	$\frac{\pi}{٣}$ وحدة مكعبة
١٧	جد الحجم الناتج من دوران المثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ١) ، أ (٣ ، ١) ، أ (٣ ، ٥) دورة كاملة حول محور السينات .	$\frac{١١٢}{٦}\pi$ وحدة مكعبة
١٨	إذا دارت المنطقة الواقعة في الربعين الأول والثاني و المحصورة بين المنحنيين ص = | س | ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢ دورة كاملة حول محور السينات جد حجم الجسم الناتج .	$\frac{٨}{٣}\pi$ وحدة مكعبة
١٩	قباطية : ٢٠٠٨ تجريبي — إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين ص = | س | و ص = جـ دورة كاملة حول محور السينات يساوي ٣٦ π وحدة حجم جد قيم جـ حيث جـ > ٠	جـ = ٣
٢٠	بين أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالقطع الناقص $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}}$ = ١ الواقعة فوق محور السينات دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{٤}{٣}\pi$ أ ب^{٢}	
٢١	جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الشكل المجاور دورة كاملة حول محور السينات حيث ق (س) = جاس ، هـ (س) = ٢ − جاس 	(٢$\pi^{٢}$ − ٤π) وحدة مكعبة

لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)

الوحدة السادسة

الأعداد المركبة

٦ – ١ الاعداد المركبة

ملخص الـــدرس

تعريف

١) العدد المركب هو مقدار جبري على الشكل ع = س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح ، ت = $\sqrt{-١}$ ويسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب ويسمى ص الجزء التخيلي له

٢) مجموعة الأعداد المركبة يرمز لها بالرمز ك حيث ك = { س + ص ت ، س ، ص ∈ ح ، ت = $\sqrt{-١}$ }

مثال : العدد المركب ع = ٥ – ٣ ت الجزء الحقيقي = ٥ بينما الجزء التخيلي = –٣

مثال : العدد المركب ع = $\dfrac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ الجزء الحقيقي = – $\dfrac{١}{٢}$ بينما الجزء التخيلي = $\dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

ملاحظات مهمة

يكون العدد المركب ع = س + ص ت :

- عدداً حقيقياً إذا كان ص = ٠
- عدداً تخيلياً إذا كان س = ٠
- يساوي صفر إذا كان س ، ص = ٠

قِوى العدد ت الصحيحة

القوى الصحيحة الموجبة للعدد ت تعطى إحدى القيم : ت أو – ١ أو – ت أو ١ حيث :

$\text{ت}^{١} = \text{ت}$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$ ، $\text{ت}^{٣} = -\text{ت}$ ، $\text{ت}^{٤} = ١$

وهذه القيم تتكرر دورياً كلما زاد الأس بمقدار ٤ وحيث أن أي اس اكبر من ٤ يمكن كتابته على الصورة

٤ ن أو ٤ ن + ١ أو ٤ ن + ٢ أو ٤ ن + ٣ ، ن ∈ ص+ لذلك فإن :

- $\text{ت}^{٤\text{ن}} = (\text{ت}^{٤})^{\text{ن}} = ١$ **مثال :** $\text{ت}^{١٦} = (\text{ت}^{٤})^{٤} = ١$
- $\text{ت}^{٤\text{ن}+١} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت} = ١ \times \text{ت} = \text{ت}$ **مثال :** $\text{ت}^{٣٣} = \text{ت}^{٣٢+١} = (\text{ت}^{٤})^{٨} \times \text{ت} = \text{ت}$
- $\text{ت}^{٤\text{ن}+٢} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{٢} = ١ \times -١ = -١$ **مثال :** $\text{ت}^{٥٠} = \text{ت}^{٤٨+٢} = (\text{ت}^{٤})^{١٢} \times \text{ت}^{٢} = -١$
- $\text{ت}^{٤\text{ن}+٣} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{٣} = ١ \times -\text{ت} = -\text{ت}$ **مثال :** $\text{ت}^{٨٧} = \text{ت}^{٨٤+٣} = (\text{ت}^{٤})^{٢١} \times \text{ت}^{٣} = -\text{ت}$

بالنسبة للأسس السالبة تضرب في $ت^{٤ن}$ فيكون الناتج ت أو −١ أو −ت أو ١

$ت^{-١٦} = ت^{-١٦} \times ت^{١٦} = ت^{٠} = ١$ ، $ت^{-١٨} = ت^{-١٨} \times ت^{٢٠} = ت^{٢} = -١$

$ت^{-١٥} = ت^{-١٥} \times ت^{١٦} = ت$ ، $ت^{-٣٧} = ت^{-٣٧} \times ت^{٤٠} = ت^{٣} = -ت$

$\frac{١}{ت^{٢٣}} = ت^{-٢٣} = ت^{-٢٣} \times ت^{٢٤} = ت$

استخدام الآلة الحاسبة لتبسيط قِوى العدد ت الصحيحة

١) إذا كان الأس موجب

نقوم بقسمة الاس على ٤ وننظر إلى الباقي بعد الفاصلة العشرية فإذا كان :

- لا يوجد باقي أي ناتج القسمة = صفر الناتج يكون ١ مثل : $ت^{٣٢}$ = ناتج قسمة ٣٢ على ٤ = ٨
- الباقي بعد الفاصية العشرية = ٠,٢٥ الناتج يكون ت مثل : $ت^{١٠١}$ = ناتج قسمة ١٧ على ٤ = ٤,٢٥
- الباقي بعد الفاصلة العشرية = ٠,٥ الناتج يكون −١ مثل : $ت^{٥٠}$ = ناتج قسمة ٥٠ على ٤ = ١٢,٥
- الباقي بعد الفاصلة العشرية = ٠,٧٥ الناتج يكون −ت مثل : $ت^{٩١}$ = ناتج قسمة ٩١ على ٤ = ٢٢,٧٥

٢) إذا كان الأس سالب

- لا يوجد باقي أي ناتج القسمة = صفر الناتج يكون ١ مثل : $ت^{-٤٨}$ = ناتج قسمة −٤٨ على ٤ = −١٢
- الباقي بعد الفاصلة العشرية = −٠,٢٥ الناتج يكون −ت مثل : $ت^{-٨٩}$ = ناتج قسمة −٨٩ على ٤ = −٢٢,٢٥
- الباقي بعد الفاصلة العشرية = −٠,٥ الناتج يكون −١ مثل : $ت^{-٣٨}$ = ناتج قسمة ٣٢ على ٤ = −٩,٥
- الباقي بعد الفاصلة العشرية = −٠,٧٥ الناتج يكون ت مثل : $ت^{-١٥}$ = ناتج قسمة −١٥ على ٤ = −٣,٧٥

يمكن تلخيص ما سبق في الجدول التالي

الأس موجب		الأس سالب	
الباقي بعد الفاصلة	الناتج	الباقي بعد الفاصلة	الناتج
صفر	١	صفر	١
٢٥	ت	−٢٥	−ت
٥	−١	−٥	−١
٧٥	−ت	−٧٥	ت

مثال

أكتب في أبسط صورة :

ت^{117} ، ت^{-35} ، $\text{ت}^{8\text{ن}+7}$ ، $\text{ت}^{-4\text{ن}+3}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}$

الحل

$\text{ت}^{117} = \text{ت}^{116} \times \text{ت}^{1} = \text{ت}$

$\text{ت}^{-35} = \text{ت}^{-35} \times \text{ت}^{36} = \text{ت}$

$\text{ت}^{8\text{ن}+7} = \text{ت}^{8\text{ن}} \times \text{ت}^{7} = \text{ت}^{8\text{ن}} \times \text{ت}^{4} \times \text{ت}^{3} = 1 \times 1 \times -\text{ت} = -\text{ت}$

$\text{ت}^{-4\text{ن}+2} = \text{ت}^{-4\text{ن}} \times \text{ت}^{2} = 1 \times -1 = -1$

مثال

جد ناتج : $3\text{ت}^{64} - 5\text{ت}^{99} + 2\text{ت}^{16} + 3\text{ت}^{-20}$

الحل

$\text{ت}^{64} = 1$ ، $\text{ت}^{99} = -\text{ت}$ ، $\text{ت}^{16} = 1$ ، $\text{ت}^{-20} = 1$

$\Leftarrow \quad 3\text{ت}^{64} - 5\text{ت}^{99} + 2\text{ت}^{16} + 3\text{ت}^{-20} = 3(1) - 5(-\text{ت}) + 2(1) + 3(1)$

$= 8 + 5\text{ت}$

مثال

جد ناتج ما يلي : $(1-\text{ت}^{5})(1-\text{ت}^{10})(1-\text{ت}^{15})$.

الحل

$\text{ت}^{5} = \text{ت}$ ، $\text{ت}^{10} = -1$ ، $\text{ت}^{15} = -\text{ت}$

$\Leftarrow \quad (1-\text{ت}^{5})(1-\text{ت}^{10})(1-\text{ت}^{15}) = (1-\text{ت})(1+1)(1+\text{ت}) = 2(1-\text{ت})(1+\text{ت})$

$= 2(1^{2}-\text{ت}^{2}) = 2(1-(-1)) = 2 \times 2 = 4$

ورقة عمل (١) — الأعداد المركبة

إختر الإجابة الصحيحة

١) العدد ٢ت هو عدد غير حقيقي مربعه يساوي :			
(أ) $\sqrt{-١}$	(ب) -٤	(ج) $٤\sqrt{-١}$	(د) ٤
٢) قيمة $ت^{٤ن + ٣}$ حيث ن عدد صحيح يساوي :			
(أ) ت	(ب) -١	(ج) $ت^{٢}$	(د) $-ت$
٣) $\sqrt{-٣٦} =$:			
(أ) ٦ت	(ب) $-٦ت$	(ج) $\pm ٦ت$	(د) $-\sqrt{٦}\,ت$
٤) قيمة $ت^{-٢٦}$ = فإن قيمة/قيم س التي تحقق المعادلة :			
(أ) ١	(ب) -١	(ج) ت	(د) $-ت$
٥) $\sqrt{-١٦} \times \sqrt{-٢٥} =$:			
(أ) ٢٠	(ب) -٢٠	(ج) ٢٠ت	(د) $-٢٠ت$
٦) جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي — قيمة $ت^{٧} + \frac{١}{ت^{٩}} =$			
(أ) ٢	(ب) $-٢ت$	(ج) -٢	(د) صفر
٧) قيمة المقدار : $ت^{١٥} + ت^{١٦} + ت^{١٧} + ت^{١٨} =$			
(أ) ت	(ب) -١	(ج) صفر	(د) $-ت$
٨) رام الله والبيرة : ٢٠١٩ تجريبي — قيمة المقدار : $ت^{ن} + ت^{ن + ١} + ت^{ن + ٢} + ت^{ن + ٣} =$			
(أ) $-ت$	(ب) -١	(ج) ت	(د) صفر
٩) قيمة $\begin{vmatrix} ت^{٩} & ١ \\ ت^{١٢} & ت^{٥} \end{vmatrix}$:			
(أ) -١	(ب) ت	(ج) $ت - ٢$	(د) -٢
١٠) قيمة $ت^{-٢٦}$ = فإن قيمة/قيم س التي تحقق المعادلة :			
(أ) ١	(ب) -١	(ج) ت	(د) $-ت$
١١) جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان $س = \sqrt{ت^{١٥}\,(١ + ت)^{٢} - ١}$ فإن $س^{١٤} =$			
(أ) $\sqrt{٢}$	(ب) ٢	(ج) ١	(د) صفر


١٢	فلسطين : ٢٠١٩	ما الجزء التخيلي للعدد المركب ت + ٢ ت^{٢} + ٤ ت^{٣} ؟	
أ) −٣	ب) −٣ت	جـ) −٢	د) ٢
١٣	شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي	قيمة ت$^{-٢ن + ١}$ حيث ن عدد صحيح	
أ) ± ١	ب) ± ت	جـ) ٢ت	د) صفر
١٤	طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي	ما قيمة المقدار (١ + ت + ت^{٢})^{٥٧} ؟	
أ) −١	ب) ١	جـ) ت	د) − ت

إجابات الإختيار من متعدد (الأعداد المركبة)

١	ب	−٤	٢	د	− ت	٣	أ	٦ت
٤			٥	ب	−٢٠	٦	ب	−٢ت
٧	جـ	صفر	٨	د	صفر	٩	د	−٢
١٠			١١	جـ	١	١٢	أ	−٣
١٣	ب	± ت	١٤	جـ	ت	١٥		

ورقة عمل (٢) الأعداد المركبة

١	جد قيمة : $ت^{١٨} + \frac{١}{ت^{-٥٦}} + ٣ت^{٢٦٣} - ٥ت^{٦٥٠} + ٧ت^{٩٧}$	$٥ + ٤ت$
٢	جد ناتج : $(\sqrt{٨} - \sqrt{-٥٤})(\sqrt{١٨} - \sqrt{-٢٤})$	$-٢٤ - ٢٦\sqrt{٣}\,ت$
٣	ضع المقدار $\frac{١ + ت + ٢ت^{٢} + ٢ت^{٣}}{١ - ٥ت + ٣ت^{٢} - ٣ت^{٣}}$ في أبسط صورة	$\frac{١}{٢}$
٤	أثبت أن : $\frac{١ + ٤ت + ت^{٢}}{٢ - ت - ٢ت^{٢} - ت^{٣}} = ت$	
٥	جد قيمة : $\frac{١}{ت^{١٥}} - \frac{٤}{ت^{٢١}} + ت^{-٨٦} - \frac{٥}{ت^{٦٧٤}}$	$٤ + ٥ت$

٦ – ٢ العمليات على الأعداد المركبة

ملخص الدرس

أولاً : تساوي عددين مركبين

تعريف

يتساوى العددان المركبان $ع_١ = س_١ + ص_١ ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$ إذا وفقط إذا كان لهما الجزء الحقيقي نفسه والجزء التخيلي نفسه أي $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

ثانياً : جمع وطرح الأعداد المركبة

تعريف

إذا كان $ع_١ = س_١ + ص_١ ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$ فإن : $ع_١ \pm ع_٢ = (س_١ \pm س_٢) + (ص_١ \pm ص_٢)ت$

خواص عملية الجمع على الأعداد المركبة

١) عملية الجمع مغلقة بمعنى أن : $\forall\ ع_١ ، ع_٢ \in ك$ فإن : $ع_١ + ع_٢ \in ك$

٢) عملية الجمع تجميعية أي أن : $\forall\ ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ \in ك$ فإن : $(ع_١ + ع_٢) + ع_٣ = ع_١ + (ع_٢ + ع_٣)$

٣) العنصر المحايد لعملية الجمع هو العدد صفر حيث $\forall\ ع \in ك$ فإن : $٠ + ع = ع + ٠ = ع$

٤) النظير الجمعي : $\forall\ ع \in ك$ يوجد $-ع \in ك$ بحيث أن $ع + (-ع) = (-ع) + ع = ٠$ ويسمى $(-ع)$ بالنظير الجمعي للعدد $ع$

٥) عملية الجمع تبديلية بمعنى أن : $\forall\ ع_١ ، ع_٢ \in ك$ فإن : $ع_١ + ع_٢ = ع_٢ + ع_١$

ثالثاً : ضرب الأعداد المركبة

تعريف

إذا كان $ع_١ = س_١ + ص_١ ت$ ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$ ، $س_١$ ، $ص_١$ ، $س_٢$ ، $ص_٢ \in ح$ فإن :

$ع_١ ع_٢ = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١) ت$

نتيجة

إذا كان $جـ \in ح$ فإن : $جـ (س + ص ت) = جـ س + جـ ص ت$ (ناتج ضرب عدد ثابت في عدد مركب)

خواص عملية الضرب على الأعداد المركبة

١) عملية الضرب مغلقة بمعنى أن : $\forall$ $ع_١$ ، $ع_٢ \in ك$ فإن : $ع_١ \times ع_٢ \in ك$

٢) عملية الضرب تجميعية بمعنى أن : $\forall$ $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣ \in ك$ فإن : $(ع_١ \times ع_٢) \times ع_٣ = ع_١ \times (ع_٢ \times ع_٣)$

٣) العنصر المحايد لعملية الضرب هو العدد ١ حيث $\forall$ $ع \in ك$ فإن : $١ \times ع = ع \times ١ = ع$

٤) النظير الضربي : $\forall$ $ع \in ك$ ، $ع \neq ٠$ يوجد $\frac{١}{ع} \in ك$ بحيث $\frac{١}{ع} \times ع = ع \times \frac{١}{ع} = ١$ ويسمى $\frac{١}{ع}$ بالنظير الضربي للعدد ع ويرمز له بالرمز $ع^{-١}$

٥) عملية الضرب تبديلية بمعنى أن : $\forall$ $ع_١$ ، $ع_٢ \in ك$ فإن : $ع_١ \times ع_٢ = ع_٢ \times ع_١$

ملاحظة

النظير الضربي للعدد المركب (س + ص ت) هو $\frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢}$ ت

ويمكن إيجاد النظير الضربي بطيقة أخرى في درس لاحق

مثال

أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلات الآتية : ٧ت = (س + ٣ت) (ص – ت) – ٩

الحل

٧ت = (س + ٣ت) + (ص – ت) – ٩ ⇐ (س + ٣ت) (ص – ت) = ٩ + ٧ ت

⇐ (س ص + ٣) + (– س + ٣ص) ت = ٩ + ٧ ت

⇐ س ص + ٣ = ٩ ⇐ س ص = ٦ ------------- ①

، ٣ص – س = ٧ -------- ② من المعادلة ① س = $\frac{٦}{ص}$ -------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ② ⇐ ٣ص – $\frac{٦}{ص}$ = ٧

⇐ ٣ص^{٢} – ٦ = ٧ص ⇐ ٣ص^{٢} – ٧ص – ٦ = ٠

⇐ (٣ص + ٢)(ص – ٣) = ٠ ⇐ ص = – $\frac{٢}{٣}$ أو ص = ٣

عندما ص = – $\frac{٢}{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = –٦ × $\frac{٣}{٢}$ ⇐ س = –٩

عندما ص = ٣ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ٦ ÷ ٣ ⇐ س = ٢

⇐ م . ح = { (–٩ ، – $\frac{٢}{٣}$) ، (٢ ، ٣) }

ورقة عمل (١) العمليات على الأعداد المركبة

إختر الإجابة الصحيحة

١) جنين : ٢٠١٩ تجريبي — قيمة المقدار (١ − ت)^{٨} تساوي :			
أ) ١٦	ب) ٨	ج) ت	د) ٤ت
٢) إذا كان ع$_{١}$ = $\sqrt{-٩}$ + ٢ ، ع$_{٢}$ = ت − ٣ت^{٤} فإن ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ =			
أ) ت + ٢	ب) ٣ت − ١	ج) ٤ت − ١	د) ٣ت + ٥
٣) إذا كان ٣س − ٢ت ص = (٥ − ت)^{٢} فإن قيمتي س ، ص على الترتيب هما :			
أ) ٨ ، ٥	ب) $\frac{٢٦}{٣}$ ، ٥	ج) ٨ ، −٥	د) ٥ ، ٨
٤) جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان س (٢ − ٣ ت^{٥٧}) + ت (٢س − ص ت) = ٥ − ت$^{-٢}$ فإن قيم س ، ص ∈ ح على الترتيب			
أ) −١ ، ٥	ب) ٥ ، −١	ج) ١ ، ٣	د) ١ ، −٣
٥) إذا كان ع = ٣ + ٤ت فإن ع$^{-١}$ = :			
أ) $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{٤}{٢٥}$ ت	ب) $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٤}{٥}$ ت	ج) $\frac{٣}{٢٥}$ − $\frac{٤}{٥}$ ت	د) $\frac{٣}{٢٥}$ − $\frac{٤}{٢٥}$ ت
٦) إذا كان ٢س + ٨ص ت = −١٠ + ٤ت فإن (س ، ص) = :			
أ) (٤ ، −٥)	ب) (−٥ ، $\frac{١}{٢}$)	ج) (٢ ، ٥)	د) (−٥ ، ٢)
٧) فلسطين : ٢٠١٩ — ما قيمة $\frac{٢ت}{١ + ت}$ + $\frac{١ + ت}{١ − ت}$ ؟			
أ) ١ + ٢ت	ب) ٢ + ت	ج) ٤ + ٢ت	د) ١ − ٢ت
٨) (٣ − ٢ت) − (٥ + ت) =			
أ) −٢ − ٣ت	ب) ٢ − ٣ت	ج) −٢ + ٣ت	د) ٢ + ٣ت
٩) بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي — قيمة س ، ص على الترتيب التي تحقق المعادلة : س + ٣ − ٤ص ت = ت (٨ + ص ت) حيث س ، ص ∈ ح			
أ) ١ ، ٢	ب) −١ ، −٢	ج) ١ ، −٢	د) −١ ، ٢

إجابات الإختيار من متعدد (العمليات على الأعداد المركبة)

١	أ	١٦	٢	ج	٤ت − ١	٣	أ	٨ ، ٥
٤	ج	١ ، ٣	٥	د	$\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}$ ت	٦	ب	(−٥ ، $\frac{١}{٢}$)
٧	أ	١ + ٢ت	٨	أ	−٢ − ٣ت	٩	ب	−١ ، −٢
١٠			١١			١٢		

ورقة عمل (٢) العمليات على الأعداد المركبة

١	جد ناتج ما يلي : أ) (٣ − ٢ت)^{٢} + (٣ + ٢ت)^{٢} .	١٠
	ب) (٢ − $\frac{١}{ت}$)^{٦}	−١١٧ + ٤٤ ت
٢	أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلات الآتية : أ) ٢س + ٣س ت + ٣ص − ٣٦ ت = −١٣ + ١٤ص ت .	(−٢ ، −٣)
	ب) س^{٢} + ٢س ت − ص^{٢} − ت ص − ٢ت = ١ .	($\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$) ، (١ ، ٠)
٣	جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي أثبت أن العدد ع = (٣ − ٢ت) جذراً للمعادلة ع^{٣} + ٣ ع^{٢} − ٤١ ع + ١١٧ = ٠	
٤	جد ناتج : (٣ ت^{٥} − ٤ ت^{٨} − ٥ ت^{١٠} + ٢ ت^{١٥})^{٣}	٢ ت − ٢
٥	أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلات الآتية : أ) س^{٢} − ص^{٢} + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت) .	(٢ ، ١)
	ب) س (٣ + ٢ت) + ص (٢ − ٢ت) = ١ + ٤ت .	(١ ، −١)
٦	إذا كان ع = ٢ − ت فأوجد قيمة ع^{٣} − ع^{٢} + ٢ ع − ٣	−٩ت
٧	إذا كان ع = ٣ − ٢ ت فأوجد قيمة ع^{٤} − ٣ ع^{٣} + ٥ ع − ٢	−٧٩ + ٨ت
٨	إذا كان ع$_{١}$ = ٣ + ٤ ت ، ع$_{٢}$ = ٣ − ٤ ت فأوجد قيمة ع$_{١}^{٢}$ − ٣ ع$_{١}^{٣}$ + ٥ ع$_{٢}$ − ٢	
٩	أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلات الآتية : أ) س^{٢} − ص^{٢} + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت) .	(٢ ، ١)
	ب) س (٣ + ٢ت) + ص (٢ − ٢ت) = ١ + ٤ت .	(١ ، −١)
١٠	إذا كان (س + ص ت) (١ − ت) = ٢ + ت فاثبت ان : ٢ (س^{٣} + ص^{٣}) = ٧	
١١	إذا كان (س + ص ت) (٢س − ص ت) = ١١ + ٣ت جد قيمة : س^{٢} − ص^{٢}	−٨ أو $\frac{٥}{٢}$
١٢	جد قيمة : ($\frac{١ - ت}{١ + ت}$)^{٤}	١

٦ – ٣ قسمة الأعداد المركبة

ملخص الدرس

أولاً : المقياس والمرافق للعدد المركب

تعريف

إذا كان ع = س + ص ت

١ نسمي المقدار $\sqrt{س^2 + ص^2}$ مقياس العدد المركب ع ويرمز له | ع | أي أن | ع | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

٢ و نسمي العدد س – ص ت مرافق العدد المركب ع = س + ص ت ويرمز له $\overline{ع}$ أي أن $\overline{ع}$ = س – ص ت

خواص المقياس والعدد المرافق

إذا كان ع ∈ ك فإن :

١ $\overline{\overline{ع}} = ع$

٢ $ع\,\overline{ع} = \overline{ع}\,ع = |ع|^2$

٣ $|ع| = |\overline{ع}|$

٤ $|جـ ع| = |جـ|\,|ع|$ ، جـ ∈ ح

٥ إذا كان ع = س + ص ت فإن : $ع + \overline{ع} = ٢$ س ، $ع - \overline{ع} = ٢$ ص ت

٦ إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك فإن : $|ع_1\,ع_2| = |ع_1|\,|ع_2|$

٧ إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك فإن : $\left|\dfrac{ع_1}{ع_2}\right| = \dfrac{|ع_1|}{|ع_2|}$

ثانياً : قسمة عددين مركبين

تعريف

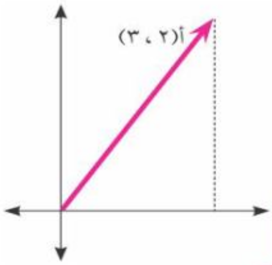
إذا كان ع_1 ، $\text{ع}_2 \in$ ك ، $\text{ع}_2 \neq ٠$ فإن $\text{ع}_1 \div \text{ع}_2 = \dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \dfrac{\text{ع}_1\,\overline{\text{ع}_2}}{\text{ع}_2\,\overline{\text{ع}_2}} = \dfrac{\text{ع}_1\,\overline{\text{ع}_2}}{|\text{ع}_2|^2}$

ملاحظة

إذا كان ع $\neq ٠$ فإن $\text{ع}^{-1} = \dfrac{1}{\text{ع}} = \dfrac{\overline{\text{ع}}}{\text{ع}\,\overline{\text{ع}}} = \dfrac{\overline{\text{ع}}}{|\text{ع}|^2}$

ثالثاً : التمثيل البياني للعدد المركب

يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ص ت بيانياً في المستوى الديكارتي بالنقطة أ (س ، ص) فالعدد المركب ٢ + ٣ ت يمثل بالنقطة أ (٢ ، ٣) كما في الشكل المقابل .

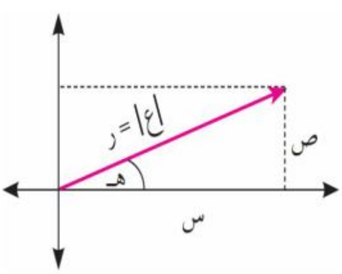


ملاحظات مهمة

- يسمى مستوى التمثيل الإحداثي للأعداد المركبة بمستوى آرجاند
- محور السينات يمثل في مستوى آرجاند بالنقطة = أ (س ، ٠) بينما محور الصادات يمثل في مستوى آرجاند بالنقطة = أ (س ، ٠)
- الزوج المرتب (س ، ص) في الأعداد المركبة يمثل متجهاً قياسياً وهو متجه بدايته نقطة الإصل (٠ ، ٠) ونهايته النقطة (س ، ص)

رابعاً : التمثيل القطبي لعدد المركب (الصورة القطبية)

تعريف



إذا قمنا بتمثيل العدد المركب ع = س + ص ت على صورة زوج مرتب (س ، ص) وهو كما ذكرنا سابقاً يمثل متجهاً قياسياً بدايته نقطة الإصل (٠ ، ٠) ونهايته النقطة (س ، ص) فإن الزاوية هـ المحصورة بين هذا المتجه والإتجاه الموجب لمحور السينات تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

ملاحظات مهمة

- من الشكل المقابل نلاحظ أن : ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث ٠ $\leqslant$ هـ $<$ ٢ π
- من فيثاغورث إذا رمزنا لطول المتجه بالرمز ر نجد أن ر = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ = مقياس العدد المركب ع أى أن ر = | ع |
- س = ر جتا هـ ، ص = ر جا هـ وبالتعويض عنهم في العدد المركب ع = س + ص ت فإنه يمكننا كتابة العدد المركب ع على الصورة : ع = ر جتا هـ + ر جا هـ ت = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

تعريف

الصورة القطبية للعدد المركب ع = س + ص ت ، ع $\neq$ ٠ هو ع = ر (جتا هـ + جا هـ ت)

حيث ر = | ع | = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

ملاحظات مهمة

- نحدد قيمة السعة الأساسية (هـ) للعدد المركب ع = س + ص ت تبعاً للحالات الآتية :

١) إذا كان س > ٠ ، ص > ٠ أي (+ ، +) ⇐ هـ تقع في الر بع **الأول** ويكون هـ = ظا $^{-١}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

٢) إذا كان س < ٠ ، ص > ٠ أي (– ، +) ⇐ هـ تقع في الر بع **الثاني** ويكون هـ = π – ظا $^{-١}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

٣) إذا كان س < ٠ ، ص < ٠ أي (– ، –) ⇐ هـ تقع في الر بع **الثالث** ويكون هـ = π + ظا $^{-١}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

٤) إذا كان س > ٠ ، ص < ٠ أي (– ، +) ⇐ هـ تقع في الر بع **الرابع** ويكون هـ = ٢ π – ظا $^{-١}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

ملاحظة

يمكن إستخدام جتا $^{-١}$ (موجب س) أو جا $^{-١}$ (موجب ص) بدل ظا $^{-١}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

حالات خاصة :

١) السعة الأساسية للعدد المركب ع = س حيث س عدد موجب هي هـ = ٠ (لانها تقع على السينات الموجب)

والمقياس ر = | س | وبناءً عليه تكون الصورة القطبية ع= ر (جتا (٠) + ت جا (٠))

مثال : الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٥ هي ع = ٥ (جتا (٠) + ت جا (٠))

الصورة القطبية للعدد المركب ع = $\frac{٣}{٤}$ هي ع = $\frac{٣}{٤}$ (جتا (٠) + ت جا (٠)) ، ………… إلخ

٢) السعة الأساسية للعدد المركب ع = س حيث س عدد سالب هي هـ = π (لانها تقع على السينات السالب)

والمقياس ر = | س | وبناءً عليه تكون الصورة القطبية ع = ر (جتا (π) + ت جا (π))

مثال : الصورة القطبية للعدد المركب ع = −٧ هي ع = −٧ (جتا (π) + ت جا (π))

الصورة القطبية للعدد المركب ع = −١١ هي ع = −١١ (جتا (π) + ت جا (π)) ، ………… إلخ

٣) السعة الأساسية للعدد المركب ع = ص ت حيث ص عدد موجب هي هـ = $\frac{\pi}{٢}$ (لانها تقع على الصادات الموجب)

والمقياس ر = | ص | وبناءً عليه تكون الصورة القطبية ع = ر (جتا ($\frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٢}$))

مثال : الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٣ت هي ع = ٣ (جتا ($\frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٢}$))

الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٢٠ت هي ع = ٢٠ (جتا ($\frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٢}$)) ، ………. إلخ

٤) السعة الأساسية للعدد المركب ع = ص ت حيث ص عدد سالب هي هـ = $\frac{\pi}{٢}$ (لانها تقع على الصادات السالب)

والمقياس ر = | ص | وبناءً عليه تكون الصورة القطبية ع = ر (جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٢}$))

مثال : الصورة القطبية للعدد المركب ع = −٢ت هي ع = ٢ (جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٢}$))

الصورة القطبية للعدد المركب ع = − $\frac{١}{٩}$ ت هي ع = $\frac{١}{٩}$ (جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٢}$)) ، …. إلخ

مثال

طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

جد قيمة $\overline{\text{ع} + \text{ت}}$ = :

أ) ع + ت   ب) ع − ت   ج) − ع + ت   د) − ع − ت

الحل

$\overline{\text{ع} + \text{ت}}$ = $\overline{\text{ع}}$ + $\overline{\text{ت}}$ = ع + (− ت) = ع − ت   (الإجابة الفرع ب)

مثال

جد المقياس والسعة للأعداد المركبة الآتية .

١) ع = ٢ت .

٢) ع = $\sqrt{٣}$ − ت .

٣) $٢\sqrt{٢}$ + $٢\sqrt{٢}$ت .

الحل

١) $ع = ٢ت$.

المقياس = $|ع| = \sqrt{٠^{٢} + ٢^{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$ ، السعة هـ تقع على الصادات الموجب = $\frac{\pi}{٢}$

٢) $ع = \sqrt{٣} - ت$.

المقياس = $|ع| = \sqrt{٤} = ٢$

ولأن س مقدار موجب و ص مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الرابع = $٢\pi - ظا^{-١}\left(\frac{موجب\ (ص)}{موجب\ (س)}\right)$

$= ٢\pi - ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = ٢\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{١١\pi}{٦}$ ⇐ السعة هـ = $\frac{١١\pi}{٦}$

٣) $ع = ٢\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢}ت$.

المقياس = $|ع| = \sqrt{٨ + ٨} = \sqrt{١٦} = ٤$

ولأن س مقدار موجب و ص مقدار موجب ⇐ هـ تقع في الربع الأول = $ظا^{-١}\left(\frac{موجب\ (ص)}{موجب\ (س)}\right)$

$= ظا^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$ ⇐ السعة هـ = $\frac{\pi}{٤}$

مثال

جد ناتج ما يلي : $\frac{(٢ + ت)(٣ + ت)}{(٢ - ت)(٣ - ت)}$.

الحل

$\frac{(٢ + ت)(٣ + ت)}{(٢ - ت)(٣ - ت)} = \frac{(٦ - ١) + (٢ + ٣)ت}{(٦ - ١) + (-٢ - ٣)ت} = \frac{٥ + ٥ت}{٥ - ٥ت}$ (لاحظ قسمة عددين مترافقين)

$= \frac{١ + ت}{١ - ت} = \frac{(١ + ت) \times (١ + ت)}{(١ - ت) \times (١ + ت)} = \frac{(١ - ١) + (١ + ١)ت}{٢} = ت$

مثال

جد الصورة القطبية للأعداد المركبة الآتية :

١) $ع = -٢\sqrt{٣} - ٢ت$.

٢) $ع = -٨ت$.

٣) $ع = \frac{١}{-\sqrt{٣} + ت}$.

الحــــــل

١) ع = − ٢ $\sqrt{٣}$ − ٢ت .

المقياس = | ع | = $\sqrt{١٢ + ٤}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ ، جتا هـ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = − $\frac{١}{٢}$

ولأن س مقدار سالب و ص مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الثالث = π + ظا$^{-1}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

= π + ظا$^{-1}$ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = π + $\frac{\pi}{٦}$ السعة هـ = $\frac{٧\pi}{٦}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٤ (جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ + حا $\frac{٧\pi}{٦}$ ت)

٢) ع = − ٨ت . المقياس = | ع | = $\sqrt{٠^{٢} + ٨^{٢}}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

جتا هـ = $\frac{٠}{٨}$ = ٠ ، جا هـ = − $\frac{٨}{٨}$ = − ١ ⇐ السعة هـ = $\frac{٣\pi}{٢}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٨ (جتا $\frac{٣\pi}{٢}$ + حا $\frac{٣\pi}{٢}$ ت)

٣) ع = $\frac{١}{-\sqrt{٣} + \text{ت}}$ = $\frac{١}{-\sqrt{٣} + \text{ت}}$ × $\frac{-\sqrt{٣} - \text{ت}}{-\sqrt{٣} - \text{ت}}$ = $\frac{-\sqrt{٣} - \text{ت}}{٤}$

= − $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ ت

المقياس = | ع | = $\sqrt{\frac{٣}{١٦} + \frac{١}{١٦}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٤}}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا هـ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = − $\frac{١}{٤}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = − $\frac{١}{٢}$

ولأن س مقدار سالب و ص مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الثالث = π + ظا$^{-1}$ ($\frac{\text{موجب (ص)}}{\text{موجب (س)}}$)

= ٢π + ظا$^{-1}$ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = π + $\frac{\pi}{٦}$ ⇐ السعة هـ = $\frac{٧\pi}{٦}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = $\frac{١}{٢}$ (جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ + ت حا $\frac{٧\pi}{٦}$)

مثال

حل العدد $ع = س^{٢} + ١$ التالي إلى عددين مترافقين .

الحل

١) $ع = س^{٢} + ١ = س^{٢} + (−١)^{٢} = (س + ت)(س − ت)$

مثال

إذا كان : $ع_{١} = \frac{٢ + ت}{١ + ت}$ ، $ع_{٢} = \frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$ ، فأثبت أن $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ مترافقان ثم جد قيمة $\frac{١٥(ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢})}{٨ ع_{١} ع_{٢} (ع_{١} + ع_{٢})}$

الحل

$$ع_{١} = \frac{(٢ + ت)(١ − ت)}{(١ + ت)(١ − ت)} = \frac{٢ − ت − ت − ت^{٢}}{١ + ١} = \frac{٣ − ت}{٢} = \frac{٣}{٢} − \frac{١}{٢} ت$$

$$ع_{٢} = \frac{(١ + ٢ت)(١ − ت)}{(١ + ت)(١ − ت)} = \frac{١ + ت − ٢ت^{٢}}{١ + ١} = \frac{٣ + ت}{٢} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} ت$$

$\Leftarrow$ $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ مترافقان

$$ع_{١} + ع_{٢} = \frac{٣}{٢} − \frac{١}{٢} ت + \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} ت = ٣$$

$$ع_{١} \times ع_{٢} = \left(\frac{٣}{٢} − \frac{١}{٢} ت\right) \times \left(\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} ت\right) = \frac{٩}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٢}$$

$$ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢} = (ع_{١} + ع_{٢})^{٢} − ٢ ع_{١} ع_{٢} \Leftarrow ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢} = ٣^{٢} − ٢ \times \frac{٥}{٢} = ٩ − ٥ = ٤$$

$$\Leftarrow \frac{١٥(ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢})}{٨ ع_{١} ع_{٢} (ع_{١} + ع_{٢})} = \frac{١٥ \times ٤}{٨ \times \frac{٥}{٢} \times ٣} = \frac{٦٠}{٦٠} = ١$$

ورقة عمل (١) قسمة الأعداد المركبة

إختر الإجابة الصحيحة

١) مرافق العدد ع = − ت − $\sqrt{٣}$:

أ) − ت + $\sqrt{٣}$	ب) ت − $\sqrt{٣}$	ج) ت + $\sqrt{٣}$	د) − ت − $\sqrt{٣}$

٢) إذا كان ع = ٥ت فإن السعة الأساسية هـ للعدد ع :

أ) صفر	ب) ٢	ج) $\frac{\pi}{٢}$	د) $\frac{٣\pi}{٢}$

٣) إذا كان ع = ١ − $\sqrt{٣}$ ت فإن | − ع | − | ع | = :

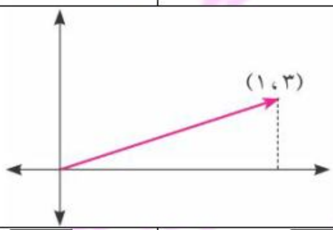
أ) ٤	ب) −٤	ج) صفر	د) ٢

٤) جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان س + ٢ص ت ، $(١ + ت)^{٥}$ عددين مركبين مترافقين فإن قيم س ، ص ∈ ح على الترتيب

أ) ٤ ، ٢	ب) −٤ ، ٢	ج) −٤ ، −٢	د) ٤ ، −٢

٥) التمثيل البياني المقابل هو لأحد الأعداد المركبة التالية :



أ) ٣ − ت	ب) $\sqrt{−٩}$ + ت	ج) ٣ + $\sqrt{−١}$	د) $\sqrt{−٩}$ − $\sqrt{−١}$

٦) جنين : ٢٠١٩ تجريبي

النظير الضربي للعدد المركب ٢ − $\sqrt{٥}$ ت = :

أ) $\frac{٢}{٣} + \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ت	ب) $\frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ت	ج) $\frac{٢}{٩} - \frac{\sqrt{٥}}{٩}$ ت	د) $\frac{٢}{٩} + \frac{\sqrt{٥}}{٩}$ ت

٧) إذا كان ع = ($\sqrt{٢}$ − ت) − ت (١ − $\sqrt{٢}$ ت) فإن | ع | =

أ) ٢	ب) $\sqrt{٢}$	ج) ٤	د) ٢$\sqrt{٢}$

٨) $\left| \sqrt{\frac{−١}{٤}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \right|$ =

أ) ٤	ب) ٣	ج) ٢	د) ١

٩) الصورة الجبرية للعدد المركب ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

أ) ١ + ت	ب) ١ − ت	ج) ١ + $\sqrt{٢}$ ت	د) ١ − $\sqrt{٢}$ ت

١٠) قيمة $\frac{٤ + ت}{٢ − ٣ت}$ =

ﺃ) $\frac{\text{٥ − ١٤ت}}{\text{١٣}}$	ب) $\frac{\text{−٥ − ١٤ت}}{\text{٣}}$	ج) $\frac{\text{−٥ − ١٤ت}}{\text{٥}}$	د) $\frac{\text{٥ + ١٤ت}}{\text{١٣}}$

١١ فلسطين : ٢٠١٩ — سعة العدد المركب ع = (٣ + ٣ت)^{٢} ؟

ﺃ) صفر	ب) $\frac{\pi}{\text{٤}}$	ج) $\frac{\pi}{\text{٣}}$	د) $\frac{\pi}{\text{٢}}$

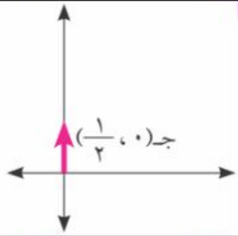
١٢ الصورة القطبية للعدد المركب الذي مقياسه ٥ وسعته الأساسية $\frac{\pi}{\text{٣}}$ هي :

ﺃ) ٥ (جتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ + ت جا $\frac{\pi}{\text{٣}}$)	ب) ٥ (جتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ − ت جا $\frac{\pi}{\text{٣}}$)
ج) ٥ (جا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ + ت جتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$)	د) ٥ (جا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ − ت جتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$)

١٣ إذا كان ع = ٣ − ٢ ت فإن | −٢ ع |

ﺃ) ٤ $\sqrt{\text{١٣}}$	ب) ٣ $\sqrt{\text{١٣}}$	ج) ٢ $\sqrt{\text{١٣}}$	د) $\sqrt{\text{١٣}}$

١٤ التمثيل البياني المقابل هو لأحد الأعداد المركبة التالية :



ﺃ) ع = ٢ ت	ب) ع = $\sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٤}}}$	ج) ع = $\sqrt{-\frac{\text{١}}{\text{٤}}}$	د) ع = ١ − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ت

١٥ الصورة الجبرية للعدد المركب ع حيث : | ع | = ٣ ، هـ = $\frac{\pi}{\text{٣}}$ هي :

ﺃ) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ + $\frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت	ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ + $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت	ج) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ + $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$ ت	د) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ + $\frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ت

١٦ جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي — السعة الأساسية العدد المركب (٢ + ٢ت)^{٢}

ﺃ) صفر	ب) $\frac{\pi}{\text{٣}}$	ج) $\frac{\pi}{\text{٤}}$	د) $\frac{\pi}{\text{٢}}$

١٧ شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان $\frac{\text{ت}}{\text{ت + ٣}}$ = $\frac{\text{١ + ٣ت}}{\text{ﺃ}}$ فإن قيمة الثابت ﺃ حيث ﺃ ∈ ح*

ﺃ) ٥	ب) ٦	ج) ٧	د) ١٠

١٨ إذا كان ع = س + ت ص عدد مركب فإن $\overline{\text{ع}}$ + ع = :

ﺃ) ٢س	ب) ٢ص	ج) ٢ص ت	د) ٢س ت

١٩ نابلس : ٢٠١٩ تجريبي — إذا كان ع ∈ ك فإن $\overline{\overline{\text{ع}} + (\text{٢ − ٣ت})}$ = :

ﺃ) $\overline{\text{ع}}$ + ٢ + ٣ت	ب) ع + ٢ + ٣ت	ج) ع + ٢ − ٣ت	د) $\overline{\text{ع}}$ + ٢ − ٣ت

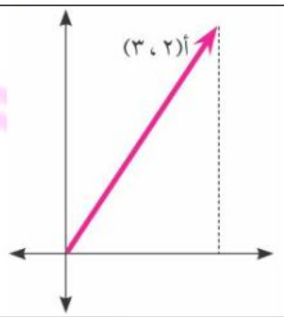
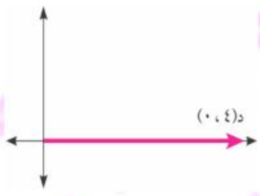
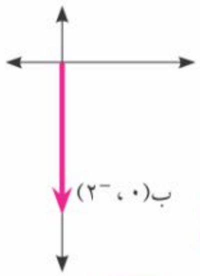
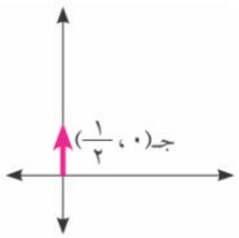
٢٠) إذا كان ع = ٢$\sqrt{٣}$ + ٢ ت فإن ع $\overline{ع}$ =

أ) ٢ $\sqrt{٣}$	ب) ٤	ج) ٢	د) ١٦

٢١) إذا كان ع = $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{٤}{٥}$ ت فإن | ع$^{-١}$ | يساوي

أ) $\frac{١}{٥}$	ب) ١	ج) ٢	د) ٥

٢٢) واحد مما يلي تمثيل بياني للعدد المركب ع = ٢ ت^{٣٥}

أ) 	ب) 	ج) 	د) 

٢٣) إذا كان ع = $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{٤}{٥}$ ت فإن $\left|\frac{\overline{ع}}{٥}\right|$ يساوي .

أ) ٢٥	ب) $\frac{١}{٥}$	ج) $\frac{١}{٢٥}$	د) ٥

٢٤) إذا كان ع$_١$ = ٢ + ت ، ع$_٢$ = ١ − ٣ ت فإن : | ع$_١$ ع$_٢$ |

أ) $\sqrt{٥٠}$	ب) $\sqrt{١٠}$	ج) $\sqrt{٥}$	د) ٥ $\sqrt{١٠}$

٢٥) الصورة القطبية للعدد المركب ٢ + ٢ت

أ) $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)	ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)
ج) − ٢$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)	د) ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

٢٦) ليكن ع = ٢ + ٥ت فإن $\overline{\overline{ع} − ٣ ت}$ =

أ) ٢ − ٨ت	ب) ٢ + ٢ت	ج) ٢ + ٨ت	د) ٢ − ٢ت

٢٧) جنين : ٢٠١٩ تجريبي | ١ + $\sqrt{-٩}$ | =

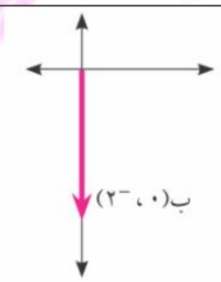
أ) ١ + ٣ت	ب) $\sqrt{١٠}$	ج) ١ − ٣ت	د) ١٠

٢٨) جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي الصورة القطبية للعدد المركب ع = $\frac{١}{ت}$ هي :

أ) جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٢}$)	ب) ٢ (جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٢}$))

ج) ٢ (جتا ($\frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٢}$))	د) جتا ($\frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٢}$)
٢٩ فلسطين : ٢٠١٩	إذا كان ع = أ + ب ت فما العبارة الصحيحة فيما يلي ؟
أ) $\overline{ع} = \frac{١}{ع}$	ب) $ع^{-١}$ = أ − ب ت
ج) $ع^{٢} - \overline{ع}^{٢}$ = ٤ أ ب ت	د) $\lvert \overline{ع} \rvert = \sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}$

إجابات الإختيار من متعدد (قسمة الأعداد المركبة)

١	ب	$ت - \sqrt{٣}$	٢	ج	$\frac{\pi}{٢}$	٣	ج	صفر
٤	ب	−٤ ، ٢	٥	ج	$٣ + \sqrt{-١}$	٦	د	$\frac{٢}{٩} + \frac{\sqrt{٥}}{٩}ت$
٧	أ	٢	٨	د	١	٩	أ	$١ + ت$
١٠	د	$\frac{٥ + ١٤ت}{١٣}$	١١	د	$\frac{\pi}{٢}$	١٢	أ	$٥(جتا \frac{\pi}{٣} + ت\ جا \frac{\pi}{٣})$
١٣	ج	$٢\sqrt{١٣}$	١٤	ج	$ع = \sqrt{-\frac{١}{٤}}$	١٥	د	$\frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}ت$
١٦	د	$\frac{\pi}{٢}$	١٧	د	١٠	١٨	أ	٢س
١٩	ب	$ع + ٢ + ٣ت$	٢٠	د	١٦	٢١	ب	١
٢٢	ج		٢٣	ب	$\frac{١}{٥}$	٢٤	أ	$\sqrt{٥٠}$
٢٥	ب	$٢\sqrt{٢}(جتا \frac{\pi}{٤} + ت\ جا \frac{\pi}{٤})$	٢٦	ج	$٢ + ٨ت$	٢٧	ب	$\sqrt{١٠}$
٢٨	أ	$جتا(\frac{٣\pi}{٢}) + ت\ جا(\frac{٣\pi}{٢})$	٢٩	ج	$ع^٢ - \bar{ع}^٢ = ٤ أ ب ت$	٣٠		

ورقة عمل (٢) قسمة الأعداد المركبة

١	إختصر إلى أبسط صورة :	
	١) $\frac{٢ت}{(١-ت)^{٢}}$	-١
	٢) $\frac{٢}{٣+ت} - \frac{٣+ت}{١+٢ت}$	$\frac{١}{٢}(١+ت)$
	٣) $\frac{٣+٤ت}{(٢+ت)(١+٣ت)}$	$\frac{١}{٢}(١-ت)$
٢	شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي	
	إذا كان $ع_{١} = ٣ - ت$ ، $ع_{٢} = ٢ + ٤ت$ ، جد :	
	١) $\overline{ع_{١} - ع_{٢}}$	$١ + ٥ت$
	٢) $(\frac{١}{٢}ع_{٢})^{-١}$	$\frac{١}{٥} - \frac{٢}{٥}ت$
٣	إذا كان $ع_{١} = ١ + ٢ت$ ، $ع_{٢} = ٣ - ٤ت$ ، جد :	
	١) $\overline{ع_{١} + ٢ع_{٢}}$	$٧ + ٦ت$
	٢) $ع_{١} \div ع_{٢}$	$-\frac{١}{٥} + \frac{٢}{٥}ت$
٤	جد الصورة الديكارتية للأعداد الآتية .	
	١) $ع = ٥ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$	$ع = \frac{٥}{٢} + \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}ت$
	٢) $ع = ٣ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$	$ع = ٣ت$
	٣) $ع = جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠$.	$ع = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت$
	٤) $ع = ٤\sqrt{٣} (جتا \frac{٥\pi}{٦} + ت جا \frac{٥\pi}{٦})$	$ع = -٦ + ٢\sqrt{٣}ت$
٥	نابلس : ٢٠١٩ تجريبي	
	إذا كان $ع = \frac{\sqrt{-٣} + ١}{٢ت}$	
	أثبت أن : $(ع - \overline{ع})^{٤ن} = ١$ حيث $ن \in ص$	
٦	جد المقياس والسعة للأعداد المركبة الآتية .	
	١) $ع = -٥ت$	$\vert ع \vert = ٥$ ، $هـ = \frac{٣\pi}{٢}$
	٢) $ع = ٢ - ٢ت$.	$\vert ع \vert = ٢\sqrt{٢}$ ، $هـ = \frac{٧\pi}{٤}$
	٣) $\frac{١}{٢}(-١ + \sqrt{٣}ت)$.	$\vert ع \vert = ١$ ، $هـ = \frac{٢\pi}{٣}$

٧	فلسطين : ٢٠١٩ إذا كان $\overline{ع_1} = ٢ت$ ، $ع_2 = ١ + ت$ جد : ١) $\frac{٢ + ٣ت}{ع_1 ع_2}$ ٢) أكتب $ع_2$ بالصورة القطبية	$-\frac{١}{٤} + \frac{٥}{٤}ت$ $\sqrt{٢}\,(\text{جتا}(\frac{\pi}{٤}) + \text{ت جا}(\frac{\pi}{٤}))$
٨	إذا كان $س = \frac{٧ - ت}{٢ - ت}$ ، $ص = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت}$ ، فأثبت أن س ، ص مترافقين .	
٩	شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان $س + ص ت = \frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ أثبت أن : $س^٢ + ص^٢ = ١$	
١٠	إذا كان ع ∈ ك أثبت أن : $\lvert ع - ١ \rvert = \lvert \overline{ع} - ١ \rvert$.	
١١	جد ناتج : $\frac{٥ + ٢ت}{(٣ + ت)^٢} + \frac{٥ - ٢ت}{(٣ - ت)^٢}$.	$\frac{٢٦}{٢٥}$
١٢	خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي أثبت أن : $\frac{(١ + ت)^ن}{(١ - ت)^{ن - ٢}} = ٢ت^{ن - ١}$ حيث ن ∈ $ص^+$	
١٣	جنوب الخليل : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان $ع_1 = ١ + ت$ ، $ع_2 = ١ - ت$ ، جد : ١) $(٣ع_2)^{-١}$ ٢) $\lvert \frac{١}{٢} ع_1 \overline{ع_1} \rvert$	$\frac{١}{٦}(١ + ت)$ ١
١٤	إذا كان : $(س + ت ص)^٢ = \frac{٣٦ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$ فأوجد س ، ص الحقيقية	$(-٣ ، ١)$ ، $(٣ ، -١)$
١٥	بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان $ع + \sqrt{ع \times \overline{ع}} = ١ - ٧ت$ بين أن : $ع \times \overline{ع} = ٦٢٥$	
١٦	إذا كان : $ع_1 = \frac{٢٦}{٥ - ت}$ ، $ع_2 = \frac{٢(٣ + ٢ت)}{١ + ت}$ ، فأثبت أن $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقان ثم جد قيمة المقدار $ع_1^٢ + (ع_1 \times ع_2) - ع_2^٢$	٧٤

١٧	جنين : ٢٠١٩ تجريبي أثبت أن : $\frac{(١ + ت)^{٢}}{٢ - ت} - \frac{(١ - ت)^{٢}}{٢ + ت} = \frac{٨}{٥}$ ت	
١٨	إذا كان : ع = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت أكتب العدد $(\overline{ع})^{-١}$ على الصورة القطبية .	$\frac{١}{٤}$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)
١٩	أكتب العدد المركب ع = −٦ (جتا ٢٢٥° − ت جا ٢٢٥°) .	٦ (جتا $\frac{٧\pi}{٤}$ + حا $\frac{٧\pi}{٤}$ ت)
٢٠	جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي بين أن : $\frac{١}{(١ - ت)^{٢}} - \frac{١}{(١ + ت)^{٢}}$ = ت	
٢١	خارجي حلل الأعداد الآتية إلى عددين مترافقين . ١) ع = ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} . ٢) ع = ٥ .	(٢س+٣ص ت)(٢س−٣ص ت) (٢ + ت) (٢ − ت)
٢٢	جنوب نابلس : ٢٠١٩ تجريبي بين أن : $\frac{١}{(١ - ت)^{٢}} - \frac{١}{(١ + ت)^{٢}}$ = ت	
٢٣	شمال الخليل : ٢٠١٩ تجريبي أكتب العدد المركب ع = $\left(\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}\right)^{٢}$ على الصورة القطبية	(جتا ($\frac{٤\pi}{٣}$) + ت جا ($\frac{٤\pi}{٣}$))
٢٤	إذا كان ع = ٣ + ٤ ت فأوجد قيمة ع^{٢} − ع $\overline{ع}$ + $(\overline{ع})^{٢}$	−٣٩
٢٥	إذا كان : ع$_{١}$ = $\frac{٢ + ت}{٣ + ٤ت}$ ، ع$_{٢}$ = $\frac{ت}{١ + ٢ت}$ ، فأثبت أن ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ مترافقان ثم جد قيمة المقدار (ع$_{١}^{٢}$ × ع$_{٢}$) + (ع$_{١}$ × ع$_{٢}^{٢}$)	$\frac{٤}{٢٥}$
٢٦	بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي ضع العدد المركب ع = $\frac{١٨ + ٢ت}{٥ - ٤ت}$ على الصورة القطبية	٢ $\sqrt{٢}$ (جتا ($\frac{\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٤}$))

٢٧	إذا كان : $ع_١ = \frac{ت^٨ + ت^٩}{٢ + ت}$ ، $ع_٢ = \frac{١ + ت}{ت^٤ + ٢ت}$ ، فأثبت أن $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان ثم جد قيمة المقدار $ع_١^٢ - (ع_١ \times ع_٢) - \frac{٦ت - ٥٢}{٢٥}$	٢
٢٨	جد قيمة س ، ص التي تحقق المعادلة : $\frac{س + ص ت}{١ - ت} + \frac{٢س + ٣ص ت}{١ + ت} = \frac{٧}{٢}$	$(٢ ، \frac{١}{٢})$
٢٩	جد قيمة س ، ص التي تحقق المعادلة : $س + ت ص = \frac{٤ + \sqrt{٢} ت}{٣ - \sqrt{٢} ت}$	$(\frac{١٠}{١١} ، - \frac{٧\sqrt{٢}}{١١})$
٣٠	اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية : ١) $ع_١$ الذي مقياسه = ٣ وسعته = $\frac{\pi}{٢}$ ٢) $ع_٢$ الذي مقياسه = $٢\sqrt{٢}$ وسعته = $\frac{٣\pi}{٤}$ ٣) $ع_٣$ الذي مقياسه = ٤ وسعته = π	$ع_١ = ٣ت$ $ع_٢ = -٢ + ٢ت$ $ع_٣ = -٤$
٣١	إذا كان : $ع_١ = ٢ (جتا (\frac{\pi}{٦}) + جا (\frac{\pi}{٦}) ت)$ ، $ع_٢ = ٥ (جتا (\frac{٣\pi}{٢}) + جا (\frac{٣\pi}{٢}) ت)$ جد الصورة القطبية لحاصل ضربهما إرشاد : حولهم إلى الصورة الجبرية ثم جد ناتج الضرب بعد ذلك جد الصورة القطبية لناتج الضرب $ع_١ \times ع_٢$	$ع_١ \times ع_٢ =$ $١٠ (جتا (\frac{٥\pi}{٣}) +$ $جا (\frac{٥\pi}{٣}) ت)$
٣٢	خــارجي أوجد مجموع ت + ٣ت + ٥ت + ٧ت + ... إلى ١٠٠ حد	١٠٠٠٠ ت
٣٣	خــارجي أوجد مجموع $١ + \frac{ت}{٢} + \frac{ت^٢}{٤} + \frac{ت^٣}{٨} +$ .... إلى حدود	$\frac{٢٠٥}{٥١٢} (٢ + ت)$

نماذج إمتحانات

نموذج رقم (١) – المبحث رياضيات – الورقة الثانية – الزمن ساعتان ونصف مجموع العلامات (١٠٠) علامة

ملاحظة : عدد أسئلة الورقة (ستة)، أجب عن (خمسة) أسئلة منها على أن يكون الأول منها

السؤال الأول : (٢٠ علامة) ضع إشارة (X) على رمز الإجابة الصحيحة على الورقة المخصصة في دفتر الإجابة :

١) إذا كان م (س) ، هـ (س) إقترانين أصليين للإقتران ق (س) فإن (٩هـ – ٦م – (٤هـ – ٤ م))′(س) يساوي :

أ) ٢ ق(س) ب) ٤ ق′(س) ج) ٣ ق(س) د) ق′(س)

٢) يتحرك جسم في خط مستقيم من السكون مبتعداً عن نقطة ثابتة حسب العلاقة ع ت = ٢ ، ع > ٠ فإن سرعة الجسم بعد ٩ ثانية من بدء الحركة

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٣ ج) $\frac{١}{٦}$ د) ٦

٣) إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية الواحدة = $\frac{١}{٢}$ والعنصر الثامن فيها = – $\frac{١}{٢}$ فإن قيمة أ = :

أ) ٤ ب) –٤ ج) ٣ د) –٣

٤) إذا كان ق (س) = س لو$_{هـ}$ (س) فإن $\int_{١}^{هـ}$ ق″(س) د س = :

أ) ١ ب) ٢ ج) هـ د) ٣

٥) $\int \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}}{(\text{جاس جتاس})^٢}$ د س = :

أ) – ظتاس – ظاس + جـ ب) ظتاس + ظاس + جـ ج) قاس + قتاس + جـ د) – قاس – قتاس + جـ

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ص = ق(س) عند أي نقطة عليه = $\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}$ فإن ق (٢) – ق (٠) =

أ) ٢ – ٢هـ ب) ٢هـ – ٢ ج) $\frac{١ - \text{هـ}}{٢}$ د) $\frac{\text{هـ} - ١}{٢}$

٧) إذا كانت $\sigma_{ن}$ = { ٣ ، ٣ + $\frac{٢}{ن}$ ، ٣ + $\frac{٤}{ن}$ ، .... ، ١٥ } تجزئة منتظمة للفترة [٣ ، ١٥] فإن عدد عناصر التجزئة هو :

أ) ن + ١ ب) ١٢ ن + ١ ج) ١٢ ن د) ٦ ن + ١

٨) إذا كان ق (س) = $\int_{س}^{٢}$ (٣ص – ٢) د ص + $\int_{٠}^{أ}$ ٣ص^٢ دص ، ق (٢) = ٨ فإن قيمة الثابت أ ؟

أ) –٢ ب) ٢ ج) ٨ د) $\frac{٨}{٣}$


٩ إذا كان $\int_{٣}^{٧}$ ق(س) د س = $\int_{٨}^{ج}$ ق(س − ٥) د س فإن قيمة ج تساوي :

Ⓐ ٣ Ⓑ ٤ Ⓒ ١٢ Ⓓ −٢

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ١٢ (د) −٢

١٠ إذا كان ق : [−١ ، ٣] ⟵ ح إقتراناً متصلاً على الفترة وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث م ($\sigma_{ن}$ ، ق) = −٤ − $\frac{٥ - ٢ن}{ن}$ فإن $\int_{-١}^{٣}$ ق (س) د س يساوي

(أ) ٦ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) −٢

١١ إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ج د س = ٨ وكان $\int_{-٢}^{١}$ ج ق(س) د س = −٤ ، $\int_{١}^{٠}$ ق(١ − س) د س = ٧ فإن :

$\int_{-٢}^{٠}$ ق(س) د س يساوي

(أ) −٨ (ب) ٦ (ج) −٦ (د) ٨

١٢ إذا كان ق (٢٥) = ١٠ ، ق (٤) = −٢ فإن $\int_{٢}^{٥}$ س ق′(س^{٢}) د س = :

(أ) ١٢ (ب) ٨ (ج) −١٢ (د) ٦

١٣ $\int_{-١}^{١}$ س | س | د س يساوي :

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) −$\frac{٢}{٣}$ (ج) صفر (د) $\frac{١}{٣}$

١٤ إذا دارت المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ و ومحور السينات في الفترة [١ ، هـ] دورة كاملة حول محور السينات فما حجم الجسم الناتج من الدوران ؟

(أ) π وحدة حجم (ب) ٢ π وحدة حجم (ج) ٣ π وحدة حجم (د) ٤ π وحدة حجم

١٥ $\int_{٠}^{٢\pi}$ جتاس د س يقع بين القيمتين

(أ) ١ ، ٢ π (ب) − ٢ π ، ٢ π (ج) − ٢ π ، ١ (د) −١ ، ١

١٦ قيمة المقدار : ت^{ن} + ت$^{ن+١}$ + ت$^{ن+٢}$ + ت$^{ن+٣}$ =

(أ) − ت (ب) −١ (ج) ت (د) صفر

١٧ إذا كان ع = ٣ + ٤ت فإن ع$^{-١}$ = :

(أ) $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{٤}{٢٥}$ ت (ب) $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٤}{٥}$ ت (ج) $\frac{٣}{٢٥}$ − $\frac{٤}{٥}$ ت (د) $\frac{٣}{٢٥}$ − $\frac{٤}{٢٥}$ ت

١٨ إذا كان ع = ($\sqrt{٢}$ − ت) − ت (١ − $\sqrt{٢}$ ت) فإن | ع | =

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (ج) ٤ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

١٩ السعة الأساسية العدد المركب (٢ + ٢ت)^{٢}

Ⓐ صفر   Ⓑ $\frac{\pi}{٣}$ Ⓒ $\frac{\pi}{٤}$ Ⓓ $\frac{\pi}{٢}$

٢٠) الصورة القطبية للعدد المركب الذي مقياسه ٥ وسعته الأساسية $\frac{\pi}{٣}$ هي :

Ⓐ ٥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)   Ⓑ ٥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ – ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

Ⓒ ٥ (جا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٣}$)   Ⓓ ٥ (جا $\frac{\pi}{٣}$ – ت جتا $\frac{\pi}{٣}$)

السؤال الثاني : (٢٠ علامة)

أ) إستخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد : $\int_{١}^{٣}$ (٢س – ٤) د س

ب) جد التكاملات الآتية

١) $\int \sqrt{٣س^٢ - ٤س^٤}$ د س ، س > ٠   ٢) $\int_{١}^{هـ} \frac{٢}{س\,(لو_{هـ} س - ٢)\,(لو_{هـ} س - ٣)}$ د س

السؤال الثالث : (٢٠ علامة)

أ) إذا كان $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٣ + ١}$ د س = أ أثبت أن : $\int_{٠}^{٢} \frac{س^٣}{\sqrt{س^٣+١}}$ د س = $\frac{١٢ - ٢أ}{٣}$

ب) إذا كان $\frac{لو_{هـ}(س)}{ق'(س)}$ = س ، ق'(س) ≠ ٠ وكان ق(هـ^٢) = ٥ ، جد قاعدة الإقتران ق(س) .

جـ) جد الإقتران المكامل للإقتران ق (س) = | ٢س – ٤ | على الفترة [٠ ، ٤]

السؤال الرابع : (٢٠ علامة)

أ) جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحنى ص = هـ^{٢س} والمستقسم ص = هـ^٢ دورة كاملة حول محور السينات

ب) أثبت أن : $\frac{(١ + ت)^٢}{٢ - ت} - \frac{(١ - ت)^٢}{٢ + ت} = \frac{٨}{٥}$ ت

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط

السؤال الخامس : (١٠ علامات)

أ) جد التكاملات الآتية

١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{س جتاس د س}$ ٢) $\int \frac{١}{(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}} \text{ د س}$

ب) إذا كان : $ع_{١} = \frac{ت^{٨} + ت^{٩}}{٢ + ت}$ ، $ع_{٢} = \frac{١ + ت}{ت^{٤} + ٢ت}$

أثبت أن $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ مترافقان ثم جد قيمة المقدار $ع_{١}^{٢} - (ع_{١} \times ع_{٢}) - \frac{٦ت - ٥٢}{٢٥}$

السؤال السادس : (١٠ علامات)

أ) إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق}(س) \text{ د س} = ١٠$ وكان ق (٢) = ٣ ، ق (١) = −١ جد : $\int_{٠}^{١} س^{٥} \text{ق}'(س^{٣} + ١) \text{ د س}$

ب) جد قيمة أ إذا علمت أن $\int_{٠}^{٨} | س - أ | \text{ د س} = ٢٠$ ، أ $\in$ [٠ ، ٨]

إجابات الإختيار من متعدد (النموذج الأول)

١	ج	٣ ق(س)	٢	د	٦	٣	ب	٤−
٤	أ	١	٥	أ	− ظتاس − ظاس + ج	٦	ب	٢هـ − ٢
٧	د	٦ ن + ١	٨	ب	٢	٩	ج	١٢
١٠	أ	٦	١١	ب	٦	١٢	د	٦
١٣	ج	صفر	١٤	د	٤ π وحدة حجم	١٥	ب	− ٢ π ، ٢ π
١٦	د	صفر	١٧	د	$\frac{٣}{٢٥}$ − $\frac{٤}{٢٥}$ ت	١٨	أ	٢
١٩	د	$\frac{\pi}{٢}$	٢٠	أ	٥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)			

نموذج رقم (٢) – المبحث رياضيات – الورقة الثانية – الزمن ساعتان ونصف مجموع العلامات (١٠٠) علامة

ملاحظة : عدد أسئلة الورقة (ستة)، أجب عن (خمسة) أسئلة منها على أن يكون الأول منها

السؤال الأول : (٢٠ علامة) ضع إشارة (X) على رمز الإجابة الصحيحة على الورقة المخصصة في دفتر الإجابة :

١) إذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} + ٤$ وكان $\text{ق}'(٠) = ١$ ، $\text{ق}(٠) = ٤$ فإن $\text{ق}(١) =$:

أ) هـ + ٥ ب) ٥ ج) هـ − ٥ د) هـ + ٤

٢) إذا كان م(س) إقتران أصلي للإقتران ق(س) المتصل ح بحيث $\int \text{م}(\text{س})\,\text{د س} = \text{س}^٣ - \text{س}^٢ + \text{جـ}$ فإن ق (٢) =

أ) ٤ ب) ٨ ج) ١٠ د) ١٢

٣) إذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة للفترة [١ ، ٣] وكان ق (س) قابلاً للتكامل على نفس الفترة وكان

$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \dfrac{٥\text{ن}^٢ + ٢}{١٢\text{ن}^٢ + ٢}$ فإن $\int_{٣}^{١} ٢\,\text{ق}(\text{س})\,\text{د س} =$:

أ) $\frac{٥}{١٢}$ ب) $\frac{٥}{٦}$ ج) $-\frac{٥}{٦}$ د) $-\frac{٥}{٣}$

٤) إذا كانت $\sigma_{\text{ن}} = \{ ٣ ، ٣ + \frac{٢}{\text{ن}} ، ٣ + \frac{٤}{\text{ن}} ، \ldots ، ١٥ \}$ تجزئة منتظمة للفترة [٣ ، ١٥] فإن عدد عناصر التجزئة

أ) ن + ١ ب) ١٢ن + ١ ج) ١٢ن د) ٦ن + ١

٥) $\int \dfrac{\text{د س}}{\text{جتا}^٢\text{س} - ١} =$:

أ) − ظتاس + جـ ب) ظاس + جـ ج) ظتاس + جـ د) − ظاس + جـ

٦) إذا كان م(س) ، هـ(س) إقترانين أصليين للإقتران ق(س) بحيث أن

$\int_{٢}^{٤} \text{م}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{٢}^{٤} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س} = ١٠$ فإن $\int_{١}^{٣} ٢\text{س}\,(\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\,\text{د س} =$

أ) ٣٥ ب) ٣٨ ج) ٤٠ د) ٤٥

٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{\text{س}}^{٢} (٣\text{ص} - ٢)\,\text{د ص} + \int_{٠}^{\text{أ}} ٣\text{ص}^٢\,\text{د ص}$ ، ق (٢) = ٨ فإن قيمة الثابت أ ؟

أ) −٢ ب) ٢ ج) ٨ د) $\frac{٨}{٣}$

٨) قيمة $\dfrac{\text{د}}{\text{د س}} \int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^٢ + ٤}\,\text{د س} =$

أ) $\sqrt{١٣}$ ب) $\sqrt{\text{س}^٢ + ٤}$ ج) $\text{س}^٢ + ٤$ د) صفر

٩) إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [٣ ، ب] وكان العنصر التاسع فيها يساوي ٥ فإن قيمة الثابت ب تساوي :

أ) ١٢ ب) ١٠ ج) ٨ د) ٦


١٠ إذا كان $\int_{٠}^{٣}$ ن (س + ١)$^{ن - ١}$ د س = ١٥ فإن قيمة ن = :

أ ٨ ب ٦ ج ٤ د ٢

١١ $\int_{١-}^{١}$ س | س | د س يساوي :

أ $\frac{٢}{٣}$ ب $-\frac{٢}{٣}$ ج صفر د $\frac{١}{٣}$

١٢ ما قيمة ن التي تجعل $\int \frac{س^{ن}}{(س^{٥} + ٢)^{-٦}}$ د س = $\frac{(س^{٥} + ٢)^{٧}}{٣٥}$ + ج ؟

أ ٤ ب ٥ ج ٦ د ٧

١٣ إذا كان $\int_{٣}^{٧}$ ق(س) د س = $\int_{٨}^{ج}$ ق(س – ٥) د س فإن قيمة ج تساوي :

أ ٣ ب ٤ ج ١٢ د ٢–

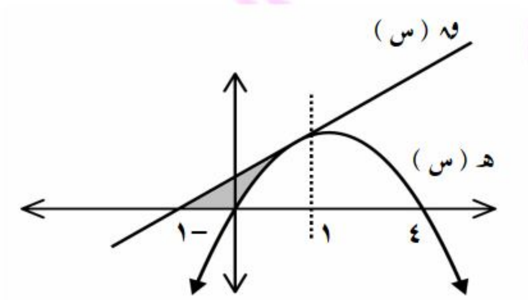
١٤ $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) د س

أ $-\pi$ ب صفر ج $\frac{\pi}{٢}$ د π

١٥ يتحرك جسيم حسب العلاقة ت = أ $\sqrt{ع}$ حيث ت التسارع (م / ث^{٢}) ، ع السرعة (م / ث) فإذا كان ع (١) = ١ م / ث ، ع (٣) = ١٦ م / ث فما قيمة الثابت أ ؟

أ ١– ب ٢ ج ٣ د ٤

١٦ مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور نعبر عنها بالتكامل :



أ $\int_{١-}^{١}$ (ق (س) – هـ (س)) د س

ب $\int_{١-}^{٠}$ ق (س) د س – $\int_{٠}^{١}$ هـ (س) د س

ج ٢ $\int_{١-}^{٠}$ (ق (س) – هـ (س)) د س

د $\int_{١-}^{١}$ ق (س) د س – $\int_{٠}^{١}$ هـ (س) د س

١٧ إذا كان ق (س) $\leqslant$ ٥ وكان ق (س) متصل على ح فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ ق (س) + ١) د س هي :

أ ١٠ ب ١١ ج ٢٢ د ١٢

١٨) إذا كان $ع_١ = \sqrt{-٩} + ٢$ ، $ع_٢ =$ ت – ٣ $ت^٤$ فإن $ع_١ + ع_٢ =$

أ) ت + ٢ ب) ٣ت – ١ ج) ٤ت – ١ د) ٣ت + ٥

١٩) قيمة المقدار $(١ - ت)^٨$ تساوي :

أ) ١٦ ب) ٨ ج) ت د) ٤ت

٢٠) ما الجزء التخيلي للعدد المركب ت + ٢ $ت^٢$ + ٤ $ت^٣$ ؟

أ) ‎-٣ ب) ‎-٣ت ج) ‎-٢ د) ٢

السؤال الثاني : (٢٠ علامة)

أ) استخدم تعريف التكامل لحساب $\int_{-١}^{٣} (٧ - ٢س)$ د س

ب) ليكن ق(س) > ٠ ، س ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، ق َ(س) ظاس – ٢ ق(س) $قا^٢$س = ٠ ، ق ($\frac{\pi}{٤}$) = ١ ، جد ق ($\frac{\pi}{٣}$)

ج) جد $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س}}$ د س ، س > ٠

السؤال الثالث : (٢٠ علامة)

أ) جد الإقتران المكامل للإقتران ق (س) = $\begin{cases} ٤س &، ٠ \leqslant س \leqslant ١ \\ ٢ + \frac{١}{س} &، ١ < س \leqslant ٢ \end{cases}$ في [٠ ، ٢]

ب) ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات حسب العلاقة : ت = ‎-٤ $ع^{\frac{٣}{٢}}$ ، ع > ٠ حيث ت تسارع الجسيم ، ع سرعة الجسيم فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم / ث أثبت ان : ف = ٢ ق $\sqrt{ع}$

ج) إذا كان $ع_١$ = ١ + ٢ت ، $ع_٢$ = ٣ – ٤ت ، جد :

١) $\overline{ع_١ + ٢ع_٢}$ ٢) $ع_١ \div ع_٢$

السؤال الرابع : (٢٠ علامة)

أ) جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بمنحنى ق (س) = $\sqrt{جا٢س}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = $\frac{\pi}{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات

ب) جد : ١) $\int \frac{١}{جتا^٢س - جتا^٤س}$ د س ٢) $\int_{١}^{٤} \frac{|١ - س|}{س^٢ - ٥س + ٦}$ د س

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط

السؤال الخامس : (١٠ علامات)

أ) إذا كان : $ع_١ = \frac{٢ + ت}{٣ + ٤ت}$ ، $ع_٢ = \frac{ت}{١ + ٢ت}$ ، فأثبت أن:

$ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان ثم جد قيمة المقدار $(ع_١^{٢} \times ع_٢) + (ع_١ \times ع_٢^{٢})$

ب) إذا كان $\frac{لو_{هـ}(س)}{ق'(س)} = س$ ، $ق'(س) \neq ٠$ وكان $ق(هـ^{٢}) = ٥$ ، جد قاعدة الإقتران $ق(س)$.

السؤال السادس : (١٠ علامات)

أ) أكتب العدد المركب $ع = \left(\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}\right)^{٢}$ على الصورة القطبية

ب) جد $\int \frac{س\,جتاس - جاس}{س^{٢}}\,د\,س$

إجابات الإختيار من متعدد (النموذج الثاني)

١	أ	هـ + ٥	٢	ج	١٠	٣	ج	$-\frac{٥}{٦}$
٤	د	٦ق + ١	٥	ج	ظتاس + جـ	٦	ج	٤٠
٧	ب	٢	٨	د	صفر	٩	د	٦
١٠	د	٢	١١	ج	صفر	١٢	أ	٤
١٣	ج	١٢	١٤	د	π	١٥	ج	٣
١٦	د	$\int_{-١}^{١}$ ق (س) دس − $\int_{٠}^{١}$ هـ (س) دس	١٧	ج	٢٢	١٨	ج	٤ت – ١
١٩	أ	١٦	٢٠	أ	−٣			

الملحق

أولاً المثلث

المثلث ——— نظريات ونتائج هامة

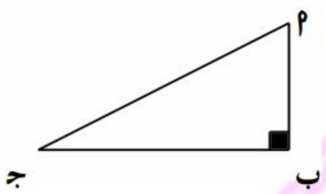
١ (نظرية فيثاغورث) في أي $\triangle$ قائم الزاوية أ ب ج في ب يكون مربع وتر القائمة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين

$(\text{أ ج})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب ج})^{٢}$

$\Leftarrow$ $\text{أ ج} = \sqrt{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب ج})^{٢}}$

$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{أ ج})^{٢} - (\text{ب ج})^{٢}}$

$\text{ب ج} = \sqrt{(\text{أ ج})^{٢} - (\text{أ ب})^{٢}}$



٢ في أي $\triangle$ قائم الزاوية يكون طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر

٣ في المثلث القائم الزاوية القطعة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر

٤ في المثلث المتساوي الساقين يكون :

١. زوايا القاعدة متساوية
٢. القطعة المستقيمة النازلة من رأس المثلث وتنصف القاعدة تكون عمودية عليها
٣. العمود النازل من رأس المثلث متساوى الساقين على القاعدة ينصف كلًا من القاعدة وزاوية الرأس

٥ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في أي مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه .

٦ الزاوية الخارجية لمثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها

المثلث — مساحة المثلث

١) مساحة أي مثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الإرتفاع

٢) مساحة أي مثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين فيه × جيب الزاوية بينهما

حالات خاصة :

١) مساحة المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعي القائمة

٢) مساحة المثلث المتساوي الأضلاع = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢} حيث ل طول الضلع

المثلث — قانون الجيب

قانون الجيب $\frac{\bar{أ}}{\text{جا } أ} = \frac{\bar{ب}}{\text{جا } ب} = \frac{\bar{ج}}{\text{جا } ج}$

ويستخدم قانون الجيب لحل المثلث الغير قائم إذا علم فيه قياس زاويتين وضلع أو ضلعان وزاوية تقابل احدهما .

مثال

١) حل المثلث أ ب ج الذي فيه $\bar{أ}$ = ٢سم ، أ = ٤٥° ، ب = ٧٥° .

الحـــــل

١) ج = ١٨٠ − (٤٥ + ٧٥) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

$\frac{\bar{أ}}{\text{جا } أ} = \frac{\bar{ب}}{\text{جا } ب} \Leftarrow \bar{ب} = \frac{\bar{أ} \text{ جا } ب}{\text{جا } أ} = \frac{٢ \text{ جا } ٧٥°}{\text{جا } ٤٥°} \approx ٢.٧$سم

$\frac{\bar{أ}}{\text{جا } أ} = \frac{\bar{ج}}{\text{جا } ج} \Leftarrow \bar{ج} = \frac{\bar{أ} \text{ جا } ج}{\text{جا } أ} = \frac{٢ \text{ جا } ٦٠°}{\text{جا } ٤٥°} \approx ٢.٤$سم

المثلث — قانون جيب التمام

ويستخدم لحل المثلث إذا علم فيه طولي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما أو أطوال أضلاعه الثلاثة .

$\bar{أ}^{٢} = \bar{ب}^{٢} + \bar{ج}^{٢} - ٢ \times \bar{ب} \times \bar{ج} \times \text{جتا } أ$ ومنها : $\text{جتا } أ = \frac{\bar{ب}^{٢} + \bar{ج}^{٢} - \bar{أ}^{٢}}{٢ \bar{ب} \bar{ج}}$

$\bar{ب}^{٢} = \bar{أ}^{٢} + \bar{ج}^{٢} - ٢ \times \bar{أ} \times \bar{ج} \times \text{جتا } ب$ ومنها : $\text{جتا } ب = \frac{\bar{أ}^{٢} + \bar{ج}^{٢} - \bar{ب}^{٢}}{٢ \bar{أ} \bar{ج}}$

$\bar{ج}^{٢} = \bar{أ}^{٢} + \bar{ب}^{٢} - ٢ \times \bar{أ} \times \bar{ب} \times \text{جتا } ج$ ومنها : $\text{جتا } ج = \frac{\bar{أ}^{٢} + \bar{ب}^{٢} - \bar{ج}^{٢}}{٢ \bar{أ} \bar{ب}}$

مثال

١) ا ب ج مثلث فيه اَ = ١٦سم ، جَ = ١٠سم ، ب = ٦٠° ، أوجد طول بَ .

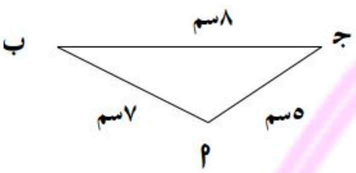
٢) أوجد قياس الزاوية ج في المثلث ا ب ج الذي أطوال أضلاعه ، ا ب ، ب ج ، ا ج هي ٧ ، ٨ ، ٥ على الترتيب

٣) حل المثلث ا ب ج الذي فيه اَ = ٨سم ، بَ = ٦سم ، ج = ٨٠°

الحـــــل

١)
$$\text{بَ}^{٢} = \text{اَ}^{٢} + \text{جَ}^{٢} - ٢\,\text{اَ جَ جتا ب} = ١٦^{٢} + ١٠^{٢} - ٢ \times ١٦ \times ١٠ \times \text{جتا } ٦٠^\circ$$
$$= ٢٥٦ + ١٠٠ - ١٦٠ = ١٩٦\text{سم} \Leftarrow \text{بَ} = \sqrt{١٩٦} = ١٤\text{سم}$$

٢) في الشكل المقابل :



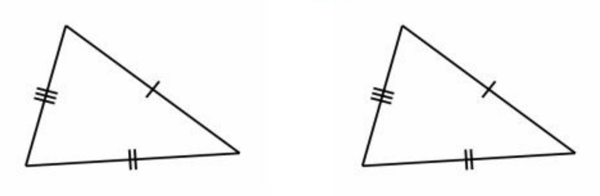
اَ = ٨سم ، بَ = ٥سم ، جَ = ٧سم

$$\Leftarrow \text{جتا ج} = \frac{\text{اَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جَ}^{٢}}{٢\ \text{اَ بَ}} = \frac{٥^{٢} + ٨^{٢} + ٧^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{٢٥ + ٦٤ - ٤٩}{٨٠}$$
$$= \frac{٤٠}{٨٠} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ج} = ٦٠^\circ$$

٣)
$$\text{جَ}^{٢} = \text{اَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - ٢\,\text{اَ بَ جتا ج} = ٨^{٢} + ٦^{٢} - ٢ \times ٨ \times ٦ \times \text{جتا } ٨٠^\circ$$
$$= ١٠٠ - ٩٦ \text{ جتا } ٨٠^\circ \approx ٨٣.٣٣\text{سم} \Leftarrow \text{جَ} \approx \sqrt{٨٣,٣٣} \approx ٩\text{سم}$$
$$\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}} \Leftarrow \text{جا ا} = \frac{\text{اَ جا ج}}{\text{جَ}} = \frac{٨ \times \text{جا } ٨٠^\circ}{٩} \approx ٠,٨٨$$
$$\Leftarrow \text{ا} \approx ٦١^\circ \Leftarrow \text{ب} \approx ١٨٠ - (٨٠ + ٦١) = ١٨٠ - ١٤١ = ٣٩^\circ$$

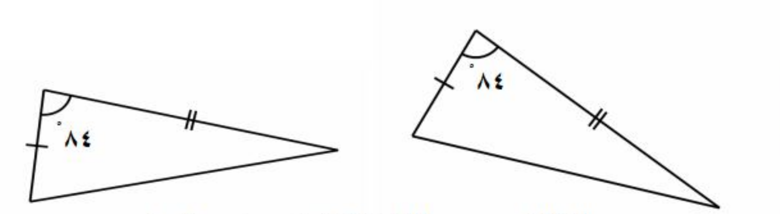
المثلث ـــــــــــــــــ تطابق المثلثات

يتطابق مثلثان فى الثلاث حالات الآتية :



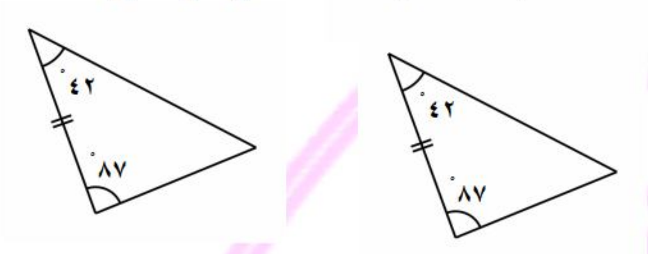
١ تساوي ثلاث أضلاع (ض ، ض ، ض)

متطابقان حسب القاعدة (ض ، ض ، ض)



٢ تساوي ضلعان وزاوية محصورة (ض ، ز ، ض)

متطابقان حسب القاعدة (ض ، ز ، ض)



٣ تساوي زاويتان وضلع (ض ، ز ، ز)

متطابقان حسب القاعدة (ض ، ز ، ز)

المثلث ـــــــــــــــــ تشابه المثلثات

يتشابه المثلثان في الحالات الآتية :

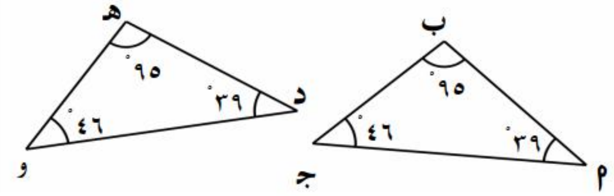
١ إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

٢ إذا تساوت ثلاث زوايا أو زاويتين

والعكس صحيح أي إذا كان المثلثان متشابهان

فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة وزواياهما المتناظرة متناسبة .

مثال



في الشكل المجاور

المثلثان أ ب جـ ، د هـ و متشابهان

وعند الحديث عن تشابه مثلثين يجب كتابة التشابه بنفس ترتيب الزوايا المتناظرة

فمثلاً نقول

∆ أ ب جـ ~ ∆ د هـ و أو ∆ أ جـ ب ~ ∆ د و هـ أو ∆ ب جـ أ ~ ∆ هـ و د

وتصعب علينا الأمور عندما نقول : ∆ أ ب جـ ~ ∆ د و هـ أو ∆ جـ ب أ ~ ∆ و د هـ ، .... إلخ

وحيث أن $\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ د هـ و فإن :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$ كذلك $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{د و}}$ ، ....

لاحظ أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} \neq \frac{\text{د و}}{\text{د هـ}}$

لاحظ الترتيب :

وحيث أن $\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ د هـ و

لأنه يجب كتابة القطع المستقيمة للمثلثات بترتيب صحيح

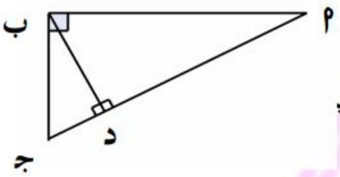
وهناك حالات خاصة للتشابه

١) المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان .

٢) المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر .

٣) يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في الآخر .

في المثلث القائم الزاوية إذا رسم من القائمة عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي .

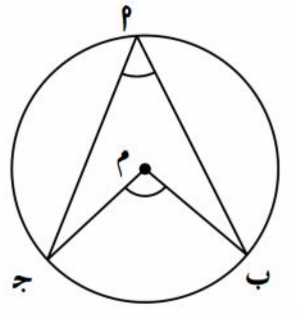


ففي الشكل المقابل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

وهو المثلث الأصلي ، تم رسم عمود من القائمة على الوتر فاصبح لدينا ثلاث مثلثات متشابهة وهي

$\triangle$ أ ب جـ (الأصلي) $\sim$ $\triangle$ أ د ب $\sim$ $\triangle$ ب د جـ

ثانياً الدائرة

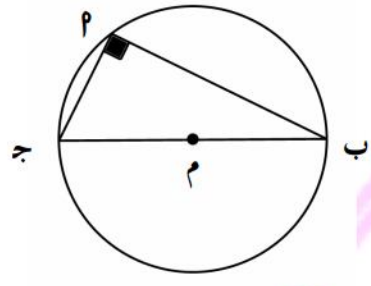


١ الزاوية المحيطية تساوي نصف الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس

مثال

في الشكل المجاور $\widehat{\text{ب م جـ}}$ زاوية مركزية و الزاوية $\widehat{\text{ب م جـ}}$ محيطية مشتركة معها في القوس $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

⇐ قياس $\widehat{\text{ب م جـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ قياس $\widehat{\text{ب م جـ}}$



وكنتيجة على ما سبق :

الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة = ٩٠° (قائمة)

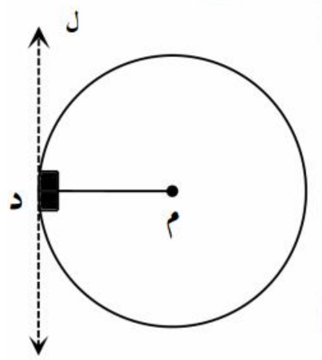
مثال

في الشكل المجاور $\widehat{\text{ب م جـ}}$ محيطية مرسومة على قطر الدائرة

⇐ قياس $\widehat{\text{ب م جـ}}$ = ٩٠°

لاحظ أن : $\widehat{\text{ب م جـ}}$ زاوية محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية (المستقيمة) $\widehat{\text{ب م جـ}}$ في القوس $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

⇐ قياس قياس $\widehat{\text{ب م جـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ قياس $\widehat{\text{ب م جـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ × ١٨٠° = ٩٠°

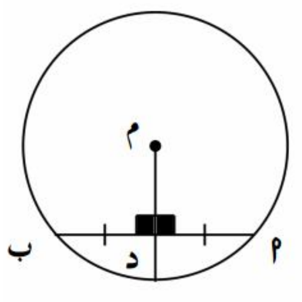


٢ القطعة المستقيمة المارة بمركز الدائرة وتقطع أي مماس للدائرة عند نقطة التماس تكون عمودية عليه .

مثال

في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مماس للدائرة عند النقطة د بحيث م د مارة بالمركز وتقطع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

عند نقطة التماس ⇐ م د ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$



٣ العمود النازل من مركز الدائرة على اى وتر فيها ينصف هذا الوتر

مثال

في الشكل المجاور م د نازل من مركز الدائرة عمودي على الوتر م ب

⇐ م د ⊥ م ب

ثالثاً معادلة الخط المستقيم

١ ميل الخط المستقيم المار بنقطتين في المستوى

لتكن النقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ في المستوى فإن ميل الخط المستقيم المار بهاتين النقطتين يعطى بالعلاقة :

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ويمكن كتابة معادلة الخط المستقيم على الصورة : $(ص - ص_١) = م\,(س - س_١)$

ملاحظات مهمة :

١ يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتان يمر بهما أو بمعلومة ميله ونقطة واحدة يمر بها كما سنرى أثناء حل الأمثلة .

٢ يتوازى الخطان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ إذا كان ميل الأول $م_١$ يساوي ميل الثاني $م_٢$ أي أن : $ل_١ \parallel ل_٢$ إذا كان $م_١ = م_٢$

ونستفيد من ذلك في إمكانية إيجاد معادلة خط مستقيم يمر في نقطة ويوازي مستقيم آخر ميله معلوم

٣ يتعامد الخطان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ إذا كان حاصل ضرب ميل الأول $م_١$ وميل الثاني $م_٢$ يساوي -١ أي أن :

$ل_١ \perp ل_٢$ إذا كان $م_١ \times م_٢ = -١$ بمعنى آخر ميل الأول يساوي سالب مقلوب ميل الثاني أي $م_١ = -\frac{١}{م_٢}$.

ونستفيد من ذلك في إمكانية إيجاد معادلة خط مستقيم يمر في نقطة واحدة ويعامد مستقيم آخر ميله معلوم

٢ المسافة بين نقطتين في المستوى

لتكن النقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ في المستوى فإن المسافة بينهما أو طول القطعة المستقيمة أ ب تعطى بالعلاقة

: $ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

٣ إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين

إحداثيات منتصف المسافة بين النقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ هي: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

٤ المسافة بين نقطة ومستقيم في المستوى :

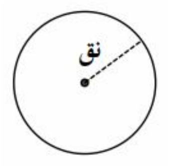
لتكن النقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$ ، والمستقيم الذى معادلته أس + ب ص + جـ = ٠ في المستوى فإن المسافة بينهما تعطى

بالعلاقة : $ف = \frac{أس_١ + ب ص_١ + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

رابعاً مساحات وحجوم

مساحات وحجوم ——— الدائرة

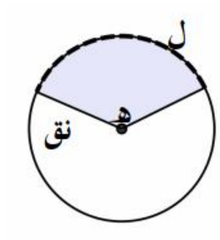
المساحة = π نق^{٢}



دائرة نصف قطرها نق

الحجم = ٢ π نق

مساحات وحجوم ——— القطاع الدائري

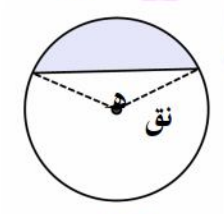


القطاع الدائرى عبارة عن جزء من الدائرة محدود بقوس ونصفي قطرين

- مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ نق^{٢} كذلك مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق
- طول قوس القطاع ل = هـ نق
- محيط القطاع = ٢نق + ل

قطاع دائري نصف قطر دائرته نق وزاويته المركزية هـ

مساحات وحجوم ——— القطعة الدائرية

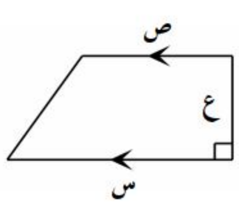


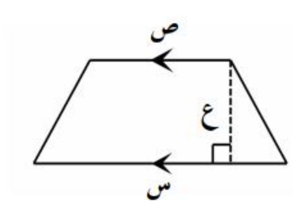
القطعة الدائرية : عبارة عن جزء من الدائرة محدود بقوس ونصفي قطرين يمران بطرفيه

- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ – جا هـ)

قطعة دائرية نصف قطر دائتها نق والزاوية المركزية

مساحات وحجوم ——— شبه المنحرف



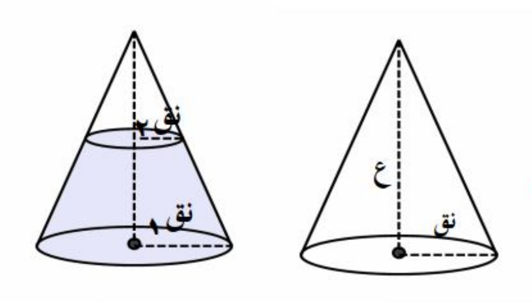


شبه المنحرف : عبارة عن شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان

- المساحة = نصف مجموع القاعدتين × الإرتفاع

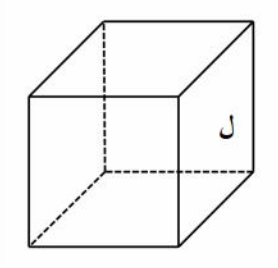
= $\frac{١}{٢}$ (س + ص) × ع

مساحات وحجوم —— المخروط



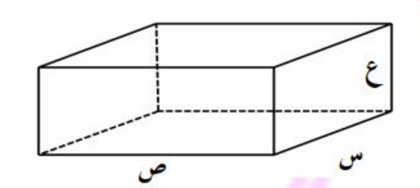
- حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}\pi \times \text{نق}^{٢} \times \text{ع}$
- حجم المخروط الناقص = $\frac{١}{٣}\pi\ \text{ع} \times (\text{نق}_{١}^{٢} + \text{نق}_{١}\ \text{نق}_{٢} + \text{نق}_{٢}^{٢})$

مساحات وحجوم



- حجم المكعب = $\text{ل}^{٣}$
- المساحة الجانبية = $٤\text{ل}^{٢}$
- المساحة الكلية = $٦\text{ل}^{٢}$

مساحات وحجوم —— متوازي المستطيلات



- حجم متوازي المستطيلات = س × ص × ع
- المساحة الجانبية = ٢ س ع + ٢ ص ع
- المساحة الكلية = ٢ س ع + ٢ ص ع + ٢ س ص

مساحات وحجوم —— المنشور

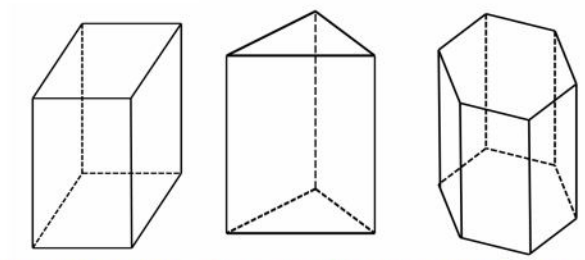
المنشور عبارة عن مجسم له قاعدتين مضلعتين متوازيتين ومتطابقتين وباقي الأوجه مستطيلات

ملاحظات :

١ – يسمى المنشور ثلاثي أو رباعي أو خماسي …… إلخ وذلك حسب عدد أضلاع القاعدتين .

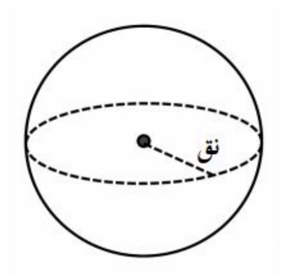
٢ – يسمى المنشور منتظم إذا كانت قاعدته عبارة عن مضلعين منتظمين

- حجم المنشور = مساحة إحدى القاعدتين × الإرتفاع



منشور سداسي منتظم — منشور ثلاثي غير منتظم — منشور رباعي منتظم

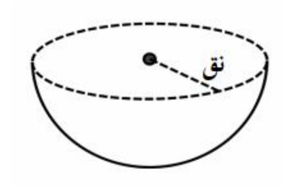
مساحات وحجوم —— الكرة



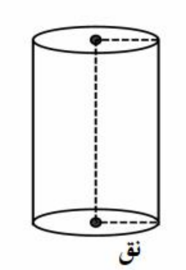
- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi\ \text{نق}^{٣}$
- مساحة سطح الكرة = $٤\ \pi\ \text{نق}^{٢}$

ملاحظة : حجم نصف الكرة

$= \frac{٢}{٣}\pi\ \text{نق}^{٣}$



مساحات وحجوم — الأسطوانة الدائرية



- حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع = π نق^{٢} ع

- مساحة السطح الكلي للأسطوانة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
  = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

حساب مثلثات — المتطابقات المثلثية

متطابقات فيثاغورث (المتطابقات الأساسية)		
جا^{٢}م + جتا^{٢}م = ١	ظا^{٢}م + ١ = قا^{٢}م	ظتا^{٢}م + ١ = قتا^{٢}م

متطابقات سالب الزاوية (متطابقات الزوجية والفردية)		
جا (– م) = – جا م	جتا (– م) = جتا م	ظا (– م) = – ظا م

متطابقات الزاويتين المتتامتين		
جتا ($\frac{\pi}{٢}$ – م) = جا م	جا ($\frac{\pi}{٢}$ – م) = جتا م	ظا ($\frac{\pi}{٢}$ – م) = ظتا م

متطابقات الإزاحة بمقدار $\frac{\pi}{٢}$		
جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + م) = – جا م	جا ($\frac{\pi}{٢}$ + م) = جتا م	ظا ($\frac{\pi}{٢}$ + م) = – ظتا م

متطابقات النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين	متطابقات ضعف الزاوية : هامة للغاية
جا (م + ب) = جا م جتا ب + جتا م جا ب	جا ٢م = ٢ جا م جتا م
جا (م – ب) = جا م جتا ب – جتا م جا ب	جتا ٢م = جتا^{٢}م – جا^{٢}م = ٢جتا^{٢}م – ١ = ١ – ٢جا^{٢}م
جتا (م + ب) = جتا م جتا ب – جا م جا ب	
جتا (م – ب) = جتا م جتا ب + جا م جا ب	
ظا (م + ب) = $\frac{\text{ظا م + ظا ب}}{\text{١ – ظا م ظا ب}}$	ظا ٢م = $\frac{\text{٢ ظا م}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{م}}$
ظا (م – ب) = $\frac{\text{ظا م – ظا ب}}{\text{١ + ظا م ظا ب}}$	

متطابقات مجموع وفرق النسب مثلثية	متطابقات حاصل ضرب نسب مثلثية
جا أ + جا ب = ٢ جا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$ جتا $\left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)$	جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ [جا (أ + ب) + جا (أ − ب)]
جا أ − جا ب = ٢ جتا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$ جا $\left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)$	جا أ جا ب = − $\frac{١}{٢}$ [جتا (أ + ب) − جتا (أ − ب)]
جتا أ + جتا ب = ٢ جتا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$ جتا $\left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)$	جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ [جتا (أ + ب) + جتا (أ − ب)]
جتا أ − جتا ب = − ٢ جا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$ جا $\left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)$	

ملاحظة هامة جداً

مكن تغيير الزاوية في المتطابقة بنفس النمط مثلاً :

نعلم أن : ظا^{٢}أ + ١ = قا^{٢}أ

إذن : ظا^{٢} ٣أ + ١ = قا^{٢} ٣أ   كذلك : ظا^{٢} ٥أ + ١ = قا^{٢} ٥أ ، .... وهكذا

نعلم أن : جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ

إذن : جا ٤أ = ٢ جا ٢أ جتا ٢أ   كذلك : جا أ = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ أ جتا $\frac{١}{٢}$ أ ، .... وهكذا

نعلم أن : جتا ٢أ = ١ − ٢جا^{٢}أ

إذن : جتا ٦أ = ١ − ٢جا^{٢} ٣أ ، جتا أ = ١ − ٢جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ أ .... وهكذا

ملاحظة هامة جداً

عزيزي الطالب ممكن تشتق وتستنتج متطابقات كثيرة مهمة بنفسك اعتماداً على متطابقات أخرى **فعلى سبيل المثال** :

من متطابقة ضعف الزاوية جتا ٢أ = ١ − ٢جا^{٢} أ ممكن تستنتج بكل بساطة أن : جتا ٤أ = ١ − ٢ جا^{٢} ٢أ

كذلك جتا أ = ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ وهكذا ....

ويمكن من المتطابقة جتا أ = ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ **إستنتاج أن** : جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ = $\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{٢}}$ وهكذا ......

كتاب (المبدع) في الرياضيات - للفصل الثاني

الصف الثاني عشر - الفرع العلمي والصناعي

إعداد

أ. بديع أحمد حمدان

تمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح وتحقيق أعلى الدرجات

أي تعليق على المادة التواصل معي مباشرة

لمزيد من الفائدة إنضم إلى مجتمعنا :

مجموعة فيسبوك (تجمع رياضيات توجيهي – نحو القمة)